

경북대학교 자연 I · II 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

경북대 자연계열 수학 · 신규 실전모의 제1회 대문항 1

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

BlueMath_KNU_Natural_Math_Mock01_Questions_20261022.pdf

상세해설: 원본 PDF 1-3쪽

BlueMath_KNU_Natural_Math_Mock01_Solutions_20261022.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

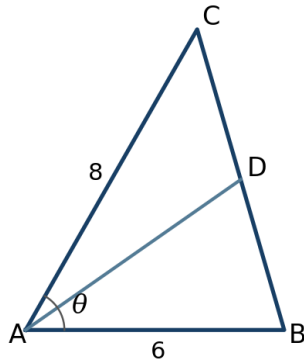
제1회 · 대문항 1

삼각형의 중선과 넓이의 비

수학영역 전용 · 과학통합 · 의학논술 미포함 · 독립 신규 제작 학습자료

제시문 (가) 두 변의 길이가 b, c 이고 그 사이각이 θ 인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}bc\sin\theta$ 이다. (나) 좌표평면에서 두 점을 잇는 선분의 중점은 두 점의 x 좌표와 y 좌표를 각각 평균하여 얻는다.

삼각형 ABC에서 $AB = 6, AC = 8$ 이고 $\angle BAC = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)이다. 변 BC의 중점을 D라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S , 중선 AD의 길이를 L 이라 한다.



그림은 조건 이해를 위한 예시이며 실제 각도나 길이 비율을 뜻하지 않습니다.

[1-1] 자체 15점

A를 원점, 반직선 AB를 x 축의 양의 방향으로 놓아 D의 좌표를 구하고, L^2 을 $\cos\theta$ 에 관한 식으로 나타내시오.

[1-2] 자체 15점

S 의 최댓값과 그때의 L 을 구하시오.

[1-3] 자체 20점

$\frac{S}{L}$ 의 최댓값을 구하고, 등호가 성립할 때 $\cos\theta, S, L$ 의 값을 모두 구하시오. 최댓값의 근거를 제시하시오.

경북대학교 자연계열 수학영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 [1-1]

수학영역 전용 · 과학통합 · 의학논술 미포함 · 독립 신규 제작 학습자료

삼각형의 중선과 넓이의 비

좌표를 정하는 이유

AB를 수평으로 놓으면 B의 좌표가 간단해지고, AC의 수평·수직 성분을 삼각함수로 나타낼 수 있다. A(0, 0), B(6, 0)으로 놓으면 $AC = 8$, $\angle BAC = \theta$ 이므로 $C(8 \cos \theta, 8 \sin \theta)$ 이다.

$$D = (3 + 4\cos \theta, 4\sin \theta)$$

AD는 원점과 D 사이의 거리이므로 거리 공식과 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 을 사용한다.

$$L^2 = (3 + 4\cos \theta)^2 + (4\sin \theta)^2 = 25 + 24\cos \theta$$

$0 < \theta < \pi$ 에서 $-1 < \cos \theta < 1$ 이므로 $1 < L^2 < 49$ 이다. 따라서 뒤의 계산에서 L로 나누어도 된다.

자체 채점 기준

A, B, C의 좌표 설정 5점, D의 좌표 5점, L^2 의 계산과 양수 조건 5점. 총 15점.

오류 주의

D는 BC의 중점이다. 각의 이등분선과 중선은 일반적으로 같지 않으므로 AD가 각 A를 이등분한다고 가정하지 않는다.

경북대학교 자연계열 수학영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 [1-2]

수학영역 전용 · 과학통합 · 의학논술 미포함 · 독립 신규 제작 학습자료

삼각형의 중선과 넓이의 비

넓이와 각의 범위

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin \theta = 24 \sin \theta$$

$0 < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta$ 는 양수이고, 최댓값 1은 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 얻는다. 따라서 S 의 최댓값은 24이다. 이때의 삼각형은 A 에서 직각인 삼각형이다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \implies L = \sqrt{25 + 24 \cos(\frac{\pi}{2})} = 5$$

별도로 확인하면 직각삼각형의 빗변 BC 의 길이는 10이고 그 중점까지의 거리는 5이므로 같은 값을 얻는다.

자체 채점 기준

$S = 24 \sin \theta$ 5점, 범위에 따른 최대와 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 5점, $L = 5$ 5점. 총 15점.

오류 주의

S 자체가 최대일 때와 $\frac{S}{L}$ 이 최대일 때는 같다고 단정할 수 없다. 분모 L 도 θ 에 따라 변하기 때문이다.

경북대학교 자연계열 수학영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 [1-3]

수학영역 전용 · 과학통합 · 의학논술 미포함 · 독립 신규 제작 학습자료

삼각형의 중선과 넓이의 비

비의 제곱으로 비교하기

S 와 L 은 모두 양수이다. 따라서 $\frac{S}{L}$ 을 최대화하는 것과 그 제곱을 최대화하는 것은 같다. $\cos \theta$ 가 여러 번 나타나므로 $c = \cos \theta$ 로 놓는다. 이때 $-1 < c < 1$ 이고, 반대로 이 범위의 각 c 에 대응하는 θ 가 $(0, \pi)$ 에 하나씩 존재한다.

$$\left(\frac{S}{L}\right)^2 = \frac{576(1-c^2)}{25+24c}$$

분모는 양수이다. 위 식을 36과 비교하여 차이를 완전제곱으로 정리하면 상한과 등호 조건을 동시에 알 수 있다.

$$36 - \frac{576(1-c^2)}{25+24c} = \frac{36(4c+3)^2}{25+24c} \geq 0$$

등호는 $c = -\frac{3}{4}$ 일 때 성립하고, 이 값은 허용 범위 안에 있다. 그러므로 $\frac{S}{L}$ 의 최댓값은 6이다. θ 는 $(0, \pi)$ 에 있으므로 $\sin \theta$ 는 양의 제곱근을 택한다.

$$\cos \theta = -\frac{3}{4}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad S = 6\sqrt{7}, \quad L = \sqrt{7}$$

마지막으로 $\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 6$ 을 대입하여 비와 등호 조건을 확인한다.

자체 채점 기준

c 의 범위와 비의 제곱 5점, 완전제곱 비교 또는 도함수 부호로 상한 증명 8점, 등호 조건과 $S \cdot L$ 7점. 총 20점.