

BLUE MATH

이화여대

자연 II 의예·약학

학습 안내

핵심유형 → 워크북 → 기본·업그레이드 FINAL

2027학년도 대비 · 2015 개정 교육과정

구성·공부 순서·답안 작성 안내

최민구T | 학교별 출제 구조에 맞춘 서술형 훈련

수식·상세해설 개정판

이 책의 대상과 공식 시험 구조

이 자료는 이화여자대학교 자연 II 유형의 의예과·약학전공 지원자를 위한 훈련 교재입니다. 자연 I·II 공통본과 구별하여 사용합니다. 2027학년도 공식 안내는 시험시간 100분, 대문항 3개와 각 문항의 세부 문제를 제시합니다. 출제 범위는 2015 개정 고등학교 교육과정의 수학, 수학 I, 수학 II, 확률과 통계, 미적분, 기하입니다.

2027 모의 자연 II의 배점은 40점·30점·30점입니다. 이 교재의 실전 훈련도 이를 따릅니다. 이전 연도에는 배점 구성이 달랐으므로 다음 시험의 세부 문항 배점까지 미리 확정된 것은 아닙니다.

세 단계로 공부합니다

1. 핵심유형

문제를 읽고 무엇을 증명해야 하는지 자신의 문장으로 적습니다. 곧바로 답을 보지 말고 첫 판단과 필요한 교과 개념을 먼저 떠올립니다. 상세 해설에서는 계산 결과뿐 아니라 왜 그 식을 세우는지, 왜 경우를 나누는지 확인합니다.

2. 워크북

같은 유형의 조건이 어떻게 바뀌었는지 표시한 뒤 독립적으로 풀니다. 이전 문제의 숫자나 정답을 외워 대입하지 않습니다. 풀이를 쓰고 나서 모범 답안과 비교하여 빠진 논증을 다른 색으로 보완합니다.

3. FINAL 9회

기본 3회, 업그레이드1 3회, 업그레이드2 3회의 순서로 풀니다. 각 회차는 100분을 실제로 재고 풀니다. 처음부터 모든 문제를 완벽히 끝내려 하기보다 세 대문항의 시작점을 확보한 뒤 어려운 소문항으로 돌아옵니다. 업그레이드 단계는 공식 시험의 확정 난도가 아니라 더 깊은 논증을 준비하기 위한 자체 훈련 단계입니다.

해설을 읽는 방법

빠른 정답은 결과 확인용입니다. 증명 문제는 결론이 같더라도 논증이 빠지면 해결한 것이 아닙니다. 상세 해설로 출발점과 계산 과정을 이해한 다음, 모범 답안을 보지 않고 스스로 완결된 답안을 작성합니다. 다음 날 조건을 다시 읽고 처음부터 복습합니다.

반드시 확인할 네 가지

1. 함수의 정의역, 양수 조건, 자연수 조건과 끝점을 적었는가?
2. 제곱하거나 나눌 때 동치 관계와 분모가 영이 아닌 조건을 확인했는가?
3. 최댓값·최솟값이나 유일성을 주장할 때 실제 달성 조건과 근거를 썼는가?
4. 경우의 수에서 중복, 원순열의 회전, 확률의 표본공간을 구분했는가?

C01 절댓값을 포함한 현과 곡선 사이의 넓이

공식 자연II 발상 연계 변형

공식 문항에서 출발하기

2027학년도 모의논술 자연II 1(1)(2)

$f(x) = |x|e^{|x|}$ 이다. $x = 0$ 을 제외한 양쪽 구간에서 아래로 볼록임을 보이고, 0을 사이에 둔 두 점의 현도 곡선 위에 있음을 설명하시오.

연결 훈련

$f(x) = x^2 + |x|$ 라 하자. 두 점 $(t-1, f(t-1)), (t+1, f(t+1))$ 를 잇는 선분과 곡선 사이의 넓이를 $S(t)$ 라 한다.

- (1) 선분이 곡선보다 위에 있음을 보이시오.
- (2) $S(t)$ 를 구간별로 구하시오.
- (3) $S(t)$ 가 미분가능하지 않은 점과 최댓값을 구하시오.

풀이 기록

조건 해석, 사용할 성질, 경계값 확인을 순서대로 적으세요.

C01 절댓값을 포함한 현과 곡선 사이의 넓이

공식 자연II 발상 연계 변형

공식 문항에서 출발하기

2027학년도 모의논술 자연II 1(1)(2)

$f(x) = |x|e^{|x|}$ 이다. $x = 0$ 을 제외한 양쪽 구간에서 아래로 볼록임을 보이고, 0을 사이에 둔 두 점의 현도 곡선 위에 있음을 설명하시오.

공식 문항 재구성 해설

발상 이유. 절댓값의 식이 바뀌는 곳을 사이에 둔 현은 한쪽 구간의 미분 결과만으로 설명할 수 없다. 먼저 한쪽 구간에서 증명하고, 그다음 원점을 지나도록 나눈 두 선분을 이용한다.

도함수에서 현의 위치를 얻기. $x > 0$ 에서 $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x > 0$ 이므로 f' 가 증가한다. 같은 쪽의 세 좌표 $p < x < q$ 에 평균값정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} < \frac{f(q) - f(x)}{q - x}.$$

양수인 분모를 곱해 정리하면

$$f(x) < \frac{q-x}{q-p}f(p) + \frac{x-p}{q-p}f(q)$$

이므로 현이 곡선 위에 있다. 음수 쪽은 $f(-x) = f(x)$ 를 이용해 같은 결론을 얻는다. 끝점이 0인 경우에는 $0 < x < q$ 에서 $f(x) = xe^x < xe^q$ 인데 오른쪽은 원점과 $(q, f(q))$ 를 잇는 선분의 높이이다.

0을 사이에 둔 경우. $p < 0 < q$ 라 하고 원점을 O 라 하자. 현 PQ 의 $x = 0$ 에서의 높이는 $\frac{qf(p) - pf(q)}{q-p} > 0$ 이다. 선분 PO 와 현 PQ 의 높이 차는 $x = p$ 에서 0, $x = 0$ 에서 양수인 일차식이므로 $[p, 0]$ 에서 음수가 아니다. $[0, q]$ 에서도 같다. 곡선은 각각 PO, OQ 아래에 있고 두 선분은 PQ 아래에 있으므로 전체 곡선도 현 아래에 있다. 이 논증은 $x = 0$ 에서 도함수가 존재한다고 가정하지 않는다.

연결 훈련

$f(x) = x^2 + |x|$ 라 하자. 두 점 $(t-1, f(t-1)), (t+1, f(t+1))$ 를 잇는 선분과 곡선 사이의 넓이를 $S(t)$ 라 한다.

- (1) 선분이 곡선보다 위에 있음을 보이시오.
- (2) $S(t)$ 를 구간별로 구하시오.
- (3) $S(t)$ 가 미분가능하지 않은 점과 최댓값을 구하시오.

첫 판단

먼저 현이 곡선 위인지 증명한 뒤 사다리꼴 넓이에서 정적분을 뺀다. 절댓값의 꺾이는 점 0이 적분구간 안에 있는지에 따라 중심 t 를 나눈다. 다항식 부분과 절댓값 부분을 따로 계산하면 계산량이 줄어든다.

상세 해설

발상 이유. 절댓값의 식은 $x = 0$ 에서 바뀐다. x^2 부분과 $|x|$ 부분의 현 높이를 각각 더하면 $f(x)$ 의 현 높이가 되므로, 두 부분의 넓이를 따로 계산하여 더한다.

(1) 현의 위치. x^2 의 그래프 위에서 x 좌표가 $t-1, t+1$ 인 두 점을 잇는 현의 높이와 x^2 의 차는 $1 - (x-t)^2$ 이다. 두 끝점 사이에서는 $|x-t| \leq 1$ 이므로 이 차는 음수가 아니다. $|x|$ 의 그래프는 두 끝점이 같은 쪽에 있으면 직선이고, 양쪽에 있으면 현 아래에 놓인다. 뒤의 경우 현과 그래프의 차는 $x = 0$ 의 양쪽에서 각각 일차식이며, 끝점에서 0이고 가운데에서 양수이기 때문이다. 따라서 두 차의 합도 음수가 아니어서 주어진 함수의 현이 위에 있다.

(2) 먼저 x^2 부분의 넓이를 구한다. $u = x - t$ 로 치환하면 양 끝점은 $-1, 1$ 이다.

$$\int_{t-1}^{t+1} \{1 - (x-t)^2\} dx = \int_{-1}^1 (1-u^2) du = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

$|t| \geq 1$ 이면 절댓값 부분은 한 직선이므로 추가 넓이는 0이다. $|t| < 1$ 이면 양 끝점이 0을 사이에 두고 있다. 현 아래 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{2}{2} \{(1-t) + (t+1)\} = 2.$$

절댓값 그래프 아래 넓이는 두 삼각형의 넓이를 더하여

$$\int_{t-1}^0 (-x) dx + \int_0^{t+1} x dx = \frac{(1-t)^2 + (1+t)^2}{2} = 1 + t^2.$$

따라서 추가 넓이는 $1 - t^2$ 이다. 두 결과를 합하면

$$S(t) = \begin{cases} \frac{7}{3} - t^2 & (|t| < 1), \\ \frac{4}{3} & (|t| \geq 1). \end{cases}$$

(3) 경계에서 안쪽 식과 바깥 식의 값은 같으므로 연속이다. 안쪽 도함수는 $-2t$, 바깥 도함수는 0이다. $t = -1$ 에서 좌우 미분계수는 각각 0, 2이고 $t = 1$ 에서는 $-2, 0$ 이므로 두 점에서만 미분가능하지 않다. 안쪽 식은 $t = 0$ 에서 가장 크며, 그 값 $\frac{7}{3}$ 은 바깥 값 $\frac{4}{3}$ 보다 크다. 따라서 실제 최댓값도 $\frac{7}{3}$ 이다.

결론.

- (1) 현은 곡선 위에 놓인다.
- (2) $|t| < 1$ 이면 $S(t) = \frac{7}{3} - t^2$, $|t| \geq 1$ 이면 $S(t) = \frac{4}{3}$ 이다.
- (3) 미분불가능한 점은 $t = \pm 1$, 최댓값은 $\frac{7}{3}$ 이다.

모범 답안

(1) x^2 의 그래프는 아래로 볼록하다. 절댓값 함수의 그래프도 같은 쪽의 두 점 사이에서는 직선이고, 서로 다른 쪽의 두 점 사이에서는 현보다 아래에 있다. 두 부등식을 더하면 f 의 현도 곡선 위에 놓인다.

(2) x^2 부분의 넓이는

$$\int_{t-1}^{t+1} (1 - (x-t)^2) dx = \frac{4}{3} \quad \text{이다.}$$

$|t| \geq 1$ 이면 절댓값 부분은 직선이므로 넓이 기여가 0이다. $|t| < 1$ 이면 끝점의 절댓값 합은 2이고 절댓값의 적분은

$$\frac{(1-t)^2 + (1+t)^2}{2} = 1 + t^2 \quad \text{이다.}$$

따라서

$$S(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} + (1 - t^2) & (|t| < 1), \\ \frac{4}{3} & (|t| \geq 1). \end{cases}$$

(3) 바깥 구간의 도함수는 0이고 안쪽에서는 $-2t$ 이다. 경계 $t = \pm 1$ 에서 좌우 미분계수가 다르다. 최댓값은 $t = 0$ 일 때 $\frac{7}{3}$ 이다.

채점 기준

학습용 15점: (1) 조건의 식 정리 및 계산 5점, (2) 중간 논증과 경계 확인 5점, (3) 결론과 성립 조건 5점. 정답만 쓰고 근거를 생략하면 해당 논증 점수는 부여하지 않는다.

오류 점검

구간 경계에서는 함수값이 이어져도 미분가능하지 않을 수 있다. 최댓값과 최솟값을 혼동하지 않는다.

W02 일정한 넓이 구간과 무한히 많은 해

조건·질문 확장 변형

$f(x) = x^2 + 3|x|$ 이고 두 끝점의 x 좌표가 $t-1, t+1$ 인 현과 곡선 사이의 넓이를 $S(t)$ 라 한다.

- (1) $S(t)$ 를 구하시오.
- (2) $S(t) = d$ 의 서로 다른 실근 개수를 d 에 따라 분류하시오.
- (3) $S(t) = \frac{7}{3}$ 의 두 실근 사이의 거리를 구하시오.

풀이 기록

조건 해석, 사용할 성질, 경계값 확인을 순서대로 적으세요.

B1-1 절댓값을 포함한 현의 넓이 [40점]**창작**

함수 $f(x) = x^2 + |x|$ 의 그래프 위 두 점 $(a, f(a)), (a+1, f(a+1))$ 을 잇는 선분과 그래프 사이의 넓이를 $S(a)$ 라 하자.

- (1) 선분이 그래프보다 위에 놓임을 설명하시오. [8점]
- (2) $S(a)$ 를 구간별로 나타내시오. [12점]
- (3) S 가 미분가능하지 않은 점과 최댓값을 구하시오. [10점]
- (4) $S(a) = c$ 의 서로 다른 실근 개수를 모든 실수 c 에 대하여 분류하시오. [10점]

풀이 기록

조건 해석, 사용할 성질, 경계값 확인을 순서대로 적으세요.