

맛보기 · 문제와 완결 해설

건국대 KU자유전공 수리전공 교재의 실제 문제와 상세 해설을 발췌했습니다. 문제를 먼저 풀고, 이어지는 단계별 풀이·모범답안·학습용 채점기준을 확인하세요.

핵심유형 C01

2026학년도 기출 기반 · 공통접선과 원·포물선 사이의 넓이

워크북 W01-1

기존 자료 선별·재구성 · 두 직선에 동시에 접하는 원

기본 FINAL 1회 문항1

BlueMath 창작 · 두 접선과 포물선이 만드는 넓이

UPGRADE 2 2회 문항3

BlueMath 창작 · 각의 이등분선 제약과 삼각형의 넓이

정식 구성

핵심6 + 워크북21 + 신규 FINAL27 = 54대문항. 문제·해설 22권을 안내 포함 221쪽의 PDF로 통합했습니다. 이 파일은 그중 네 문항을 문제와 완결 해설까지 묶은 13쪽 맛보기입니다.

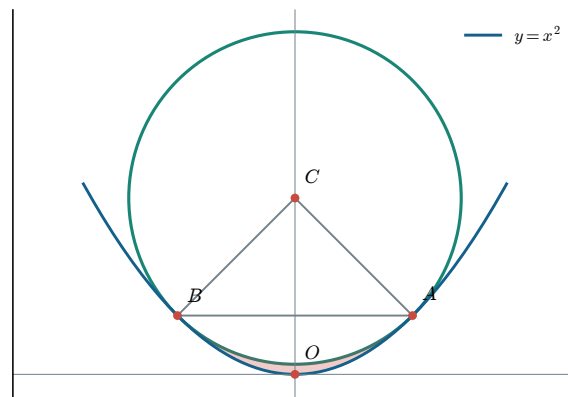
구매 전 확인

통합유형 중 수리 영역만 포함하며 인문 문항은 없습니다. 수학·수학 I ·수학 II 범위입니다. 권장 60분·60점은 수리 연습용이며 공식 전체 시험 100분과 구별됩니다.

C01 2026 · 공통접선과 원 · 포물선 사이의 넓이

수리논술 서술형 · 20점

두 연속함수의 그래프 사이의 넓이는 위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 뺀 식을 정적분하여 구한다. 곡선 $y = x^2$ 위에 $A(t, t^2), B(-t, t^2)$ 가 있다. 원 T 는 y 축 위의 점 C 를 중심으로 하고 A, B 를 지난다. 점 A 에서 원 T 의 접선과 곡선 $y = x^2$ 의 접선이 같다. 단, $t > 0$ 이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때 다음을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

(1) 점 A 의 좌표(2) 원 T 와 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이

도형의 배치, 수치와 조건은 문제의 문장에 따릅니다.

풀이 과정과 근거를 함께 쓰세요.

C01 2026 · 공통접선과 원 · 포물선 사이의 넓이

문제 읽기와 핵심 발상

원의 접선은 접점을 지나는 반지름과 수직입니다. 원을 근호로 표시해 적분하려 하지 말고, 포물선 아래 넓이와 부채꼴 넓이를 따로 계산합니다.

1. 중심의 높이를 먼저 구하기

$C = (0, c)$ 라 하자. 포물선의 접선 기울기는 $2t$, 반지름 CA 의 기울기는 $\frac{t^2 - c}{t}$ 이다. 두 직선이 수직이므로

$$2t \cdot \frac{t^2 - c}{t} = -1, \quad c - t^2 = \frac{1}{2}.$$

따라서 중심은 두 접점보다 위에 있으며, 삼각형의 높이는 항상 $\frac{1}{2}$ 이다.

2. 넓이 조건으로 좌표 결정

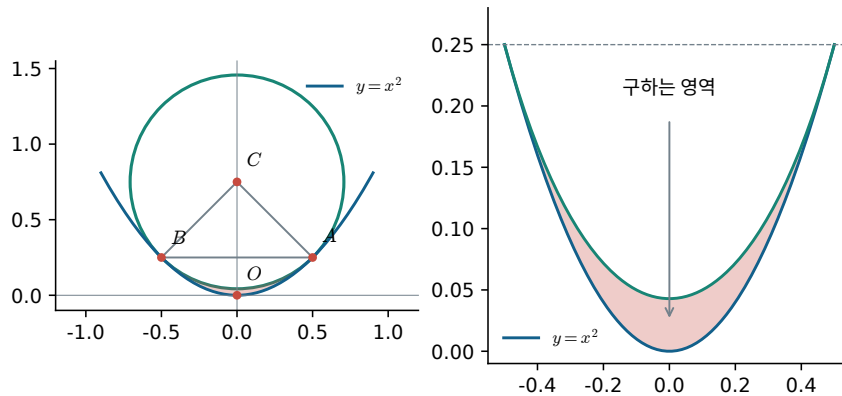
$\overline{AB} = 2t$ 이므로 삼각형 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{1}{2} = \frac{t}{2}$ 이다. 따라서 $t = \frac{1}{2}$, $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C = (0, \frac{3}{4})$ 이다. 반지름의 제곱은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 이다. 두 반지름의 기울기는 $-1, 1$ 이므로 작은 중심각 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이다.

3. 빼야 하는 원호넓이를 구분하기

현 AB 와 포물선 사이의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) dx = \frac{1}{6}.$$

현 아래의 작은 원호넓이는 부채꼴에서 삼각형을 뺀 $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ 이다. 그러므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{6} - (\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}) = \frac{5}{12} - \frac{\pi}{8}$ 이다. 실제 원 위에서 $y - x^2 = (y - \frac{1}{4})^2 \geq 0$ 이므로 해당 원호는 포물선 위에 있어 빼는 순서도 확인된다.



공통접선과 반지름. 오른쪽 확대 그림의 음영이 구하는 영역이다.

C01 제출용 답안과 채점 기준

제출용 모범답안

$C = (0, c)$ 라 하면 공통접선과 반지름의 수직 관계로

$$2t \frac{t^2 - c}{t} = -1 \Rightarrow c - t^2 = \frac{1}{2}.$$

삼각형의 넓이는 $t(c - t^2) = \frac{t}{2} = \frac{1}{4}$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C = (0, \frac{3}{4})$ 이다. 원의 반지름은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 작은 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{8}$ 이다. 원 위의 점은 $y - x^2 = (y - \frac{1}{4})^2 \geq 0$ 을 만족하므로 작은 원호는 포물선 위에 있다. 현 AB 와 포물선 사이의 넓이에서 현과 작은 원호 사이의 넓이를 빼면

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) dx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{12} - \frac{\pi}{8}.$$

결론 $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $S = \frac{5}{12} - \frac{\pi}{8}$

실전 슛컷·다른 관점

원의 접선과 포물선의 접선이 같다는 조건 하나로 중심과 접점의 높이 차가 정해집니다. 원호의 넓이는 부채꼴과 삼각형의 차로 계산하면 공통과목의 도구로 끝납니다.

감점 포인트

중심각은 $\angle ACB$ 입니다. 원점 O 를 원의 중심으로 쓰지 않습니다. 첨부 요약 해설의 부채꼴 중심 표기 혼동을 바로잡았습니다. 큰 부채꼴을 쓰거나 원호넓이를 더하면 다른 영역을 구합니다.

Blue Math 학습용 채점기준표

평가 요소	배점
공통접선과 반지름으로 중심의 높이 관계 도출	6
삼각형 넓이로 접점 좌표 결정	4
반지름·중심각 및 원호넓이	5
포물선 적분과 올바른 넓이 차	5
합계	20

동등한 논리의 다른 풀이도 인정하며, 같은 오류를 중복하여 감점하지 않습니다.

교재 연계 수학 상·하 총정리 07·08·16장; Blue Math 개념총정리 Lecture 10 그래프의 개형, Lecture 14 정적분 활용.

원자료·재구성 첨부 「26_건국대.pdf」 PDF 5쪽, KU자유전공 문제 2-1. 원문 조건·질문 유지, 도형 재작성. 학습용 20점.

WORKBOOK 1회

권장 60분 · 60점

원과 접선 · 수열과 경우의 수 · 거리 최적화

W01-1 두 직선에 동시에 접하는 원

수리논술 서술형 · 20점

원의 중심이 (a, a^2) 이고 반지름은 양수 r 이다. 이 원은 두 직선 $y = -x + 4$, $y = x + 2$ 에 모두 접한다.

- (1) 가능한 모든 a 를 구하시오.
- (2) 각 경우의 원의 방정식을 구하시오. 풀이 과정에 원이 두 직선에 실제로 접하는지 확인하는 과정을 포함하시오.

풀이 과정과 근거를 함께 쓰세요.

W01-1 두 직선에 동시에 접하는 원

문제 읽기와 핵심 발상

두 접선까지의 거리가 같은 점은 각의 이등분선 위에 있습니다. 중심의 좌표가 이미 한 문자로 표현되어 있으므로 거리의 절댓값을 같게 놓습니다.

1. 두 거리의 등식

중심에서 두 직선까지의 거리는 각각 $\frac{|a + a^2 - 4|}{\sqrt{2}}$, $\frac{|a - a^2 + 2|}{\sqrt{2}}$ 이다. 두 거리가 같을 필요충분조건은

$$a^2 + a - 4 = \pm(a - a^2 + 2)$$

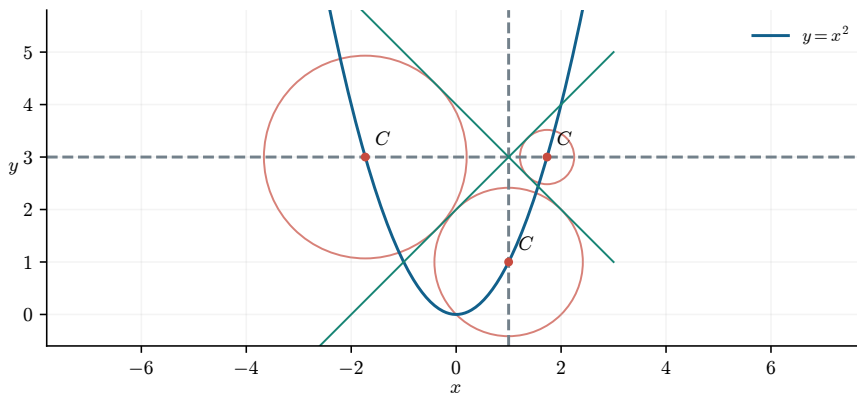
이다. 절댓값을 없앨 때 두 경우를 모두 적는다.

2. 중심의 후보

양의 부호인 경우 $2a^2 = 6$ 이므로 $a = \pm\sqrt{3}$ 이다. 음의 부호인 경우 $2a = 2$ 이므로 $a = 1$ 이다. 따라서 중심은 $(\sqrt{3}, 3)$, $(-\sqrt{3}, 3)$, $(1, 1)$ 이다.

3. 반지름과 충분성

대입하여 반지름은 각각 $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ 이다. 모두 양수이고 두 직선까지의 거리가 이 값과 같으므로 세 원은 실제로 접한다. 반지름의 제곱은 $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$, 2 이다.



중심은 포물선과 두 각의 이등분선의 교점이다.

W01-1 제출용 답안과 채점 기준

제출용 모범답안

중심에서 두 직선까지의 거리가 같으므로 $|a^2 + a - 4| = |a - a^2 + 2|$ 이다. 두 부호를 나누면 $a^2 = 3$ 또는 $a = 1$ 이다. 각 중심에서의 공통 거리를 반지름으로 놓으면 모두 양수이고 두 접선 조건을 만족한다. 따라서 구하는 원은

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 2 - \sqrt{3},$$

$$(x + \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 2 + \sqrt{3},$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

결론 $a = \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1$; 원의 방정식은 위 세 식

실전 슛컷·다른 관점

중심은 두 직선의 각의 이등분선 위에 놓입니다. 이번 문제에서는 그 두 이등분선이 $y = 3, x = 1$ 이어서 포물선 $y = x^2$ 와 의 교점으로도 찾을 수 있습니다.

감점 포인트

반지름은 양수입니다. 기존 원문의 b^2 표기에서 b 의 부호를 묻는 문제와 달리, 이번 문항의 r 에는 음수를 붙이지 않습니다.

Blue Math 학습용 채점기준표

평가 요소	배점
점과 직선 사이 두 거리	6
절댓값의 두 경우와 모든 중심	6
반지름·원의 방정식·충분성	8
합계	20

동등한 논리의 다른 풀이도 인정하며, 같은 오류를 중복하여 감점하지 않습니다.

교재 연계 건국대 C01·C06 / 총정리 07·08장 / 원의 접선과 거리.

원자료·재구성 항공대 이학계열 파이널(2025학년도부터 2020학년도까지·2017 포함) PDF 9쪽 문제 2-1 선별·재구성. 부호가 모호한 반지름 문자를 양수 r 로 명시하고 원의 방정식 확인을 추가.

문제 1 두 접선과 포물선이 만드는 넓이

학습용 20점 | 풀이 과정과 근거를 함께 쓰시오.

양수 t 에 대하여 포물선 $y = x^2$ 위의 두 점을 $P = (t, t^2), Q = (2t, 4t^2)$ 라 한다. 두 점에서의 접선의 교점을 R 라 하자.

- (1) 점 R 의 좌표를 t 로 나타내시오.
- (2) 삼각형 PQR 의 넓이가 2일 때 t 를 구하시오.
- (3) (2)의 t 에 대하여 선분 PQ 와 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

폴리 공간

문제 1 두 접선과 포물선이 만드는 넓이

문제 읽기와 핵심 발상

접선의 교점을 먼저 구한 뒤, 기울어진 삼각형은 두 삼각형의 넓이 차로 계산합니다. 마지막 물음의 경계는 접선이 아니라 현이라는 점을 구별합니다.

1. 접선과 교점

도함수는 $2x$ 이다. 접선은 각각 $y = 2tx - t^2$, $y = 4tx - 4t^2$ 이다. 두 식을 빼면 $2tx = 3t^2$ 이고 $t > 0$ 이므로 $R = (\frac{3t}{2}, 2t^2)$ 이다.

2. 공통 밑변으로 넓이 계산

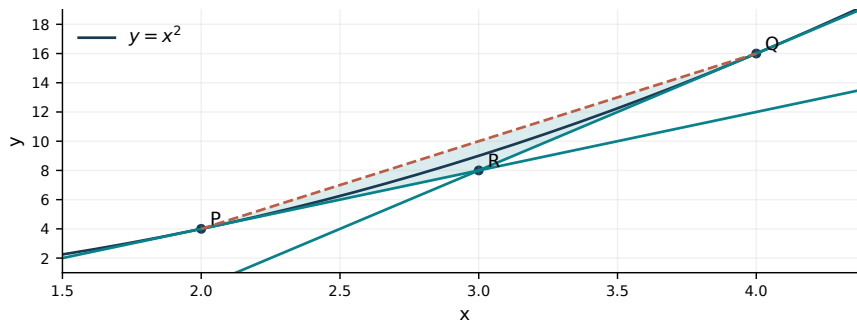
현 PQ 의 방정식은 $y = 3tx - 2t^2$ 이다. R 와 같은 x 좌표를 갖는 현 위의 점을 H 라 하면 $H = (\frac{3t}{2}, \frac{5t^2}{2})$ 이다. 수직인 RH 를 공통 밑변으로 삼각형 PRH , QRH 를 더하면 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \cdot t = \frac{t^3}{4}$ 이다. 따라서 $t^3 = 8$, $t = 2$ 이다.

3. 현과 포물선의 위아래 확인

$t \leq x \leq 2t$ 에서 $3tx - 2t^2 - x^2 = -(x-t)(x-2t) \geq 0$ 이다. 따라서 넓이는

$$\int_t^{2t} (3tx - 2t^2 - x^2) dx = \frac{t^3}{6}.$$

$t = 2$ 를 대입하면 $\frac{4}{3}$ 이다. 삼각형 넓이 2와 다른 영역이라는 것도 확인한다.



조건 이해를 위한 개략도입니다. 수치와 범위는 문제의 문장을 따릅니다.

문제 1 제출용 답안과 채점

완결된 모범답안

접선은 $y = 2tx - t^2$, $y = 4tx - 4t^2$ 이므로 $R = (\frac{3t}{2}, 2t^2)$ 이다. 현은 $y = 3tx - 2t^2$ 이고, $x = \frac{3t}{2}$ 에서 현과 R 의 높이는 $\frac{t^2}{2}$ 이다. 이 수직선분을 공통 밑변으로 삼각형을 나누면 $[PQR] = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \cdot t = \frac{t^3}{4}$ 이다. 넓이가 2이고 $t > 0$ 이므로 $t = 2$ 이다. 구간 $[2, 4]$ 에서 $6x - 8 - x^2 = -(x - 2)(x - 4) \geq 0$ 이므로 구하는 마지막 넓이는

$$\int_2^4 (6x - 8 - x^2) dx = \left[3x^2 - 8x - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{4}{3}.$$

정답 $R = (\frac{3t}{2}, 2t^2)$, $t = 2$, 넓이 $\frac{4}{3}$

실전 숏컷·다른 관점

삼각형을 수직선분으로 나누면 점과 직선 사이 거리의 근호를 계산하지 않아도 됩니다.

오류 점검

두 접선 사이의 삼각형과 현·포물선 사이의 영역을 혼동하지 않습니다. t 의 양수 조건으로 세제곱근을 확정합니다.

BlueMath 학습용 채점기준

평가 요소	배점
두 접선과 교점	6
삼각형 넓이 및 양수 t 결정	7
현의 식·위아래·정적분	7
합계	20

같은 논리를 갖춘 다른 풀이도 인정합니다. 같은 오류를 중복하여 감점하지 않습니다.

개념 연계 핵심 C01·C03 / 수학 II 접선과 정적분

출처 BlueMath 창작 · 2026년 10월. 기출과 개념을 연계한 연습 문항이며 대학 기출·공식 예상문항이 아닙니다.

문제 3 각의 이등분선 제약과 삼각형의 넓이

문제 읽기와 핵심 발상

삼각형의 존재 범위부터 정하고, 각의 이등분선을 포함한 두 삼각형에 코사인법칙을 적용해 이등분선 길이를 구합니다. 넓이를 제공하면 근호를 미분할 필요가 없습니다.

1. 삼각형 조건과 선분 분할

삼각형의 세 변은 $5, 3, x$ 이므로 $2 < x < 8$ 이다. 이 범위의 모든 x 는 세 변의 삼각형 조건을 만족한다. 각의 이등분선 정리에 따라 $BD = \frac{5x}{8}, DC = \frac{3x}{8}$ 이다.

2. 이등분선 길이 공식을 직접 유도

$AD = l, \angle ADB = \theta$ 라 하면 $\angle ADC = \pi - \theta$ 이다. 두 삼각형의 코사인법칙은

$$25 = l^2 + \frac{25x^2}{64} - \frac{5xl}{4} \cos \theta, \quad 9 = l^2 + \frac{9x^2}{64} + \frac{3xl}{4} \cos \theta.$$

첫 식에 3, 둘째 식에 5를 곱해 더하면 $120 = 8l^2 + \frac{15x^2}{8}$ 이다. 따라서

$$AD^2 = 15 - \frac{15x^2}{64}.$$

3. 제약을 변 길이 범위로 바꾸기

길이가 양수이므로 $AD \geq BD$ 는 제공한 부등식과 동치이다. 따라서

$$15 - \frac{15x^2}{64} \geq \frac{25x^2}{64} \iff x^2 \leq 24.$$

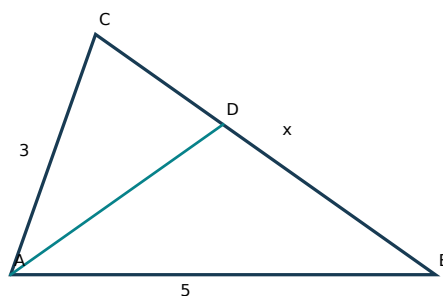
존재 조건과 합치면 $2 < x \leq 2\sqrt{6}$ 이다. 오른쪽 끝도 8보다 작아 실제 삼각형을 이룬다.

4. 제약 범위 안에서 넓이 최대

A 의 각을 α , 넓이를 K 라 하면 코사인법칙으로 $\cos \alpha = \frac{34-x^2}{30}$ 이다. 따라서

$$K^2 = \frac{225}{4} \left(1 - \frac{(34-x^2)^2}{900} \right) = \frac{900 - (34-x^2)^2}{16}.$$

허용 범위는 $4 < x^2 \leq 24 < 34$ 이므로 x^2 가 증가할수록 K^2 가 증가한다. $x^2 = 24$ 에서 $K^2 = 50$ 이므로 최대 넓이는 $5\sqrt{2}$, 그때 $x = 2\sqrt{6}$ 이다. 이때 $AD = BD$ 로 제약도 정확히 만족한다.



조건 이해를 위한 개략도입니다. 수치와 범위는 문제의 문장을 따릅니다.

문제 3 제출용 답안과 채점

완결된 모범답안

삼각형의 존재 조건은 $2 < x < 8$ 이고, 각의 이등분선 정리로 $BD = \frac{5x}{8}$, $DC = \frac{3x}{8}$ 이다. $AD = l$, $\angle ADB = \theta$ 라 하여 두 삼각형에 코사인법칙을 적용하면

$$25 = l^2 + \frac{25x^2}{64} - \frac{5xl}{4} \cos \theta, \quad 9 = l^2 + \frac{9x^2}{64} + \frac{3xl}{4} \cos \theta.$$

각각 3, 5를 곱해 더하면 $l^2 = 15 - \frac{15x^2}{64}$ 이다. 따라서 $AD \geq BD$ 는 $x^2 \leq 24$ 와 동치이며, 답은 $2 < x \leq 2\sqrt{6}$ 이다. 넓이를 K 라 하면 $\cos A = \frac{34-x^2}{30}$ 이므로

$$K^2 = \frac{900 - (34 - x^2)^2}{16}.$$

$4 < x^2 \leq 24$ 에서 $34 - x^2 > 0$ 가 감소하므로 K^2 는 증가한다. 최대는 $x = 2\sqrt{6}$ 에서 나오고 $K^2 = 50$ 이므로 $K = 5\sqrt{2}$ 이다. 이 변 길이들은 실제 삼각형을 이루며 $AD = BD$ 이므로 최댓값이 실현된다.

정답 (1) $2 < x \leq 2\sqrt{6}$. (2) 최대 넓이 $5\sqrt{2}$, 그때 $x = 2\sqrt{6}$.

실전 샷컷·다른 관점

이등분선 조건을 정리한 뒤 $x^2 \leq 24$ 이므로 $\cos A \geq \frac{1}{3} > 0$ 입니다. 가능한 A 는 예각이고 x 가 증가하면 A 도 증가하므로 $\frac{15}{2} \sin A$ 의 최대는 허용되는 가장 큰 x 에서 나옵니다. 넓이 제곱의 식은 이 판단을 대수적으로 확인합니다.

오류 점검

아무 제약이 없다면 넓이 최대는 $A = \frac{\pi}{2}$ 지만 그 경우 $x^2 = 34$ 여서 주어진 이등분선 조건을 만족하지 않습니다. $x = 2$ 를 포함하면 세 점이 한 직선 위에 놓이므로 삼각형이 되지 않습니다.

BlueMath 학습용 채점기준

평가 요소	배점
삼각형 존재 범위와 이등분선의 분할비	4
코사인법칙으로 이등분선 길이 유도	6
부등식의 동치와 정확한 범위	4
제약 안에서 넓이 최대 및 실현	6
합계	20

같은 논리를 갖춘 다른 풀이도 인정합니다. 같은 오류를 중복하여 감점하지 않습니다.

개념 연계 Core C06의 삼각형 존재 조건과 길이 제약; WB W07-1의 두 삼각형과 코사인법칙. 내접원 대신 내부 이등분선 조건을 새로 사용.

출처 BlueMath 창작 · 2026년 10월. 기출과 개념을 연계한 연습 문항이며 대학 기출·공식 예상문항이 아닙니다.