

수리논술 증명 스페셜

공통편

수학·수학 I ·수학 II

미리보기 · 전체 수록목록과 대표 샘플

조건을 읽고, 정리를 선택하고, 끝까지 증명합니다.

모든 수리논술 대학의 공통 범위 대비용입니다. 특히 한국항공대 이학계열·서울여대·한국외대 글로벌 등 공통 증명 학습이 중요한 지원자에게 권합니다.

C001-C077 | 77개 학습 묶음

원문 제시문과 연결 조건 · 이해용 상세해설 · 제출용 모범답안

이 책에는 어떤 증명이 있나요?

공통편 · 39,000원

다음 목록은 이 상품의 전체 수록 범위입니다. 각 문항의 제목뿐 아니라 무엇을 증명하고 어떤 조건·판단을 배우는지, 실제 확인된 출처까지 보여 드립니다. 목록 뒤에는 최종 문제편과 상세해설에서 가져온 대표 샘플을 이어 붙였습니다. 샘플의 번호와 수학 본문은 판매 본문과 같습니다.

공통 77학습묶음은 선수 수학·수학 I·수학 II의 논증으로 구성됩니다. 항공 공통42 원형과 기존 확장 자료의 공통 범위를 합치되 완전중복은 한 번만 수록했습니다. 모든 수리논술 대학의 공통 범위를 위한 자료이며 특히 한국항공대 이학계열·서울여대·한국외대 글로벌 지원자의 공통 증명 연습에 유용합니다.

두 권은 각각 독립 판매합니다. 선택편의 연결 조건은 선택편 안에서 확인할 수 있습니다.

문항 수는 연결된 원문과 소문항의 학습 묶음 기준입니다. 분리한 같은 원형의 소문항을 각각 새 고유 문제로 홍보하지 않습니다.

정수·다항식과 귀류법

C001 유리근이라는 가정에서 얻는 모순

수학

삼차방정식의 실근을 유리수라고 가정하여 정수의 약수 관계에서 모순을 이끌어냅니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 1교시 문제 2 [2] · 대학 공식 원문 대조

C002 정수방정식의 해를 만들고 불가능한 경우를 가르기

수학

정수방정식의 항등식으로 새 해를 만들고, 해의 유일성 또는 불가능성을 경우별로 판단합니다.

출처 옥스퍼드대학교 2022 · MAT · 문제 2 (i)–(v) · 대학 공식 원문 대조

C003 귀납법으로 만드는 다항식의 인수

수학 I + 수학

다항식의 인수 관계를 수학적 귀납법으로 증명하고 높은 차수 다항식의 나머지를 구합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 2교시 문제 2 [3](1)–(2) · 대학 공식 원문 대조

C004 정수 수열의 배수성을 귀납으로 증명

수학·수학 I · 정수의 배수와 수학적 귀납법

세제곱 점화식으로 정한 수열에서 제곱에 2를 더한 수의 거듭제곱 배수성을 증명합니다.

출처 한국외대 글로벌 워크북 W11 · 교재 표기: 한국외대 2023 기출 10; 대학 원문 별도 미대조

C005 귀류법으로 다항함수의 유일성 증명

수학·수학 II · 다항식과 귀류법

실수 전체에서의 오차 제한과 한 점의 극한조건으로 다항함수를 유일하게 결정합니다.

출처 한국외대 글로벌 워크북 W13 · 기존 외대 기출문항카드 2를 재구성한 교재 문항; 대학 원문 별도 미대조

C006 제곱의 나머지와 정수해의 귀류법

수학·수학 I · 수학 II

제곱의 나머지와 가장 작은 해를 이용하는 귀류법으로 정수방정식의 해를 빠짐없이 결정합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 1-3 · 자체 예상문항

C007 큰 항을 계산하지 않고 결정하는 배수성

수학·수학 I ·수학 II

수열의 배수성을 증명한 뒤 몫의 나머지까지 조사하여 나누어떨어지는 거듭제곱의 정확한 지수를 구합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 1-4 · 한국외대 글로벌 워크북 W11 배수성 발상 참고 변형; 교재의 외대 2023 기출 10 표기는 대학 원문 별도 미대조

C008 네 정숫값에서 모든 정숫값으로

수학·수학 I ·수학 II

삼차 이하 다항식의 네 정숫값에서 출발하여 모든 정수 입력에서 값이 정수임을 증명합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 1-2 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 문항 40의 소재 참고 변형; 이화여대 2019 표기는 대학 원문 별도 미대조

C009 여러 항의 곱의 항등식과 서로소인 수들

수학·수학 I ·수학 II

특별한 정수 수열의 곱항등식과 서로소 성질을 증명하여 서로 다른 소인수의 개수를 확보합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 1-3 · 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 17-2와 수열·곱항등식·서로소 핵심 논제 동일, 마지막 결론은 유한한 소인수 개수로 구성; 한양대 2012 수시 표기는 대학 원문 별도 미대조

C010 홀수 부분으로 분류하는 배수 관계의 증명

수학·수학 I ·수학 II

정수를 홀수 부분에 따라 분류하여 많은 수를 고르면 배수 관계가 생김을 증명하고 경계의 반례를 만듭니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 1-4 · 자체 예상문항

C011 확대 함수식과 일정한 오차 범위의 모순

수학·수학 I ·수학 II

확대 함수방정식과 일정한 오차 제한으로 함수를 유일하게 정하되 수열의 극한은 사용하지 않습니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 1-2 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 문항 42-(1)의 확대·축소 함수식 발상 참고 변형; 연세대 2025학년도 모의논술은 교재 표기

C012 최솟값 조건에서 함수식과 유리수 배수까지

수학·수학 I ·수학 II

반직선 구간의 최솟값 조건에서 증가성과 곱셈 함수식을 도출하고 유리수배의 함숫값 관계를 증명합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 1-3 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 문항 37의 조건과 (1)·(2) 참고 재구성; 이화여대 2025학년도 모의논술은 교재 표기

C013 유리수인 해가 가져야 할 홀짝 조건

수학·수학 I · 수학 II

정수계수 다항식의 유리수해가 가져야 할 홀짝 조건을 증명하고 배제되는 비와 가능한 반례를 구분합니다.

출처 Blue Math 기준 최종점검 제3회 1-4 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 문항 45의 홀짝 귀류법 발상 변형; 울산대 2023학년도 논술은 교재 표기

수열·유한합과 수학적 귀납법

C014 등차수열과 등비수열의 대소관계

수학 I

등차수열과 등비수열을 같은 초항에서 시작할 때 세 번째 항 이후의 대소관계를 수학적 귀납법으로 증명합니다.

출처 한국항공대학교 2024학년도 이학계열 1-3 · 원문의 세 소문항을 통합한 기존 기출 편집

C015 제곱수 일반항의 귀납과 교대 유한합

수학 I · 수학적 귀납법과 수열의 합

이웃한 항의 차가 주어진 수열의 일반항을 증명하고 교대합을 구합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 기본 FINAL 제4회 1-2 · 기존 제작문항, 대학 공식 기출 아님

C016 거듭제곱 부등식과 등호 조건

수학 I · 수학적 귀납법

거듭제곱 부등식을 수학적 귀납법으로 증명하고 등호가 성립할 필요충분조건을 찾습니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 FINAL 10SET SET 05 1-2 · 기존 제작문항, 대학 공식 기출 아님

C017 피보나치 수열 제곱합의 귀납 증명

수학 I · 수학적 귀납법과 수열의 합

피보나치 수열의 제곱합을 이웃한 두 항의 곱으로 나타내는 항등식을 증명합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 FINAL 10SET SET 05 1-3 · 기존 제작문항, 대학 공식 기출 아님

C018 피보나치 곱의 차와 교대 유한합

수학 I · 수학적 귀납법과 수열의 합

피보나치형 수열의 교대 부호 항등식을 증명하고 역수 곱의 합을 정리합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 업그레이드 FINAL 제10회 1-2 · 기존 제작문항; 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 1-2의 발상과 관련

C019 절댓값 반복과 실근 개수의 귀납

수학·수학 I · 절댓값과 수학적 귀납법

절댓값 연산을 반복한 함수의 실근 개수와 실근들의 네제곱합을 귀납적으로 구합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 업그레이드 FINAL 제15회 1-1 · 기존 제작문항, 대학 공식 기출 아님

C020 제곱근 근삿값 반복의 유한 일반화

수학·수학 I · 제곱근과 수학적 귀납법

제곱근을 근사하는 수열의 하한과 감소성을 증명하고 비의 제곱 점화식으로 일반화를 구합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 업그레이드 FINAL 제15회 1-2 · 기존 제작문항; 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 연습 34와 점화식·일부 논제 중복

C021 두 번의 값 변화와 귀류법으로 분석하는 수열

수학·수학 I · 수열과 경우 구분

영향 개수의 홀짝으로 정한 수열의 짝수 항·어느 항 이후로도 일정하지 않음·정해진 범위의 영향 개수를 판정합니다.

출처 FINAL WORKBOOK 추가51제 재편집본 WB51 · 기존 교재 문항, 대학 공식 기출로 표시하지 않음

C022 분수로 정의된 수열의 일반항과 여러 항의 곱

수학·수학 I ·수학 II

분수 점화식의 일반항을 귀납적으로 검증하고 연속한 여러 항의 곱을 구합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 1-1 · 자체 예상문항

C023 정수에서의 함수식과 귀납법

수학·수학 I ·수학 II

정수 위의 함수방정식으로 모든 함수값을 결정하고 차가 주어진 모든 정수쌍을 분류합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 1-2 · 자체 예상문항

C024 거듭제곱 부등식과 등호의 조건

수학·수학 I ·수학 II

가중 거듭제곱 부등식을 인수분해와 귀납법으로 증명하고 등호 조건을 정합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 1-1 · 한국외대 글로벌 워크북 W12 재구성; 교재의 외대 2023 모의 연계는 대학 원문 별도 미대조

C025 두 정수 수열과 제곱근을 사이에 두는 구간

수학·수학 I ·수학 II

두 정수 수열의 이차식 불변량을 증명하여 제곱근을 원하는 짧은 유리수 구간 안에 가둡니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 1-1 · 자체 예상문항

연속과 실근의 존재

C026 진동하는 삼각함수를 포함한 함수의 연속

수학 I + 수학 II

진동하는 사인값의 크기를 제한하여 곱으로 주어진 함수의 원점 연속성을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 5-2 (원교재 PDF 32쪽) · 원대학·원시험 출처 미확인

C027 유리수와 무리수에 따라 정의된 함수의 연속

수학 + 수학 II

유리수와 무리수에서 식이 달라지는 함수가 원점에서 연속임을 끼워넣기로 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 5-3 (원교재 PDF 33쪽) · 서강대 2013 수시 기출 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C028 한 점에서의 연속성으로 사인함수의 전체 연속성 설명

수학 I · 수학 II

단위원의 넓이와 현의 길이만으로 사인함수의 원점 연속성을 모든 실수에서의 연속성으로 확장합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 5-4 (원교재 PDF 34쪽) · 원대학·원시험 출처 미확인

C029 홀수차 실계수 다항방정식의 실근 존재

수학 + 수학 II

홀수차 실계수 다항식의 양 끝 부호로 실근이 적어도 하나 존재함을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 6-1 (원교재 PDF 36쪽) · 한양대 2009 모의 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C030 삼차방정식의 세 실근이 놓이는 구간

수학 II

삼차함수가 서로 다른 세 실근을 갖는 조건으로 가장 작은 근과 가장 큰 근의 범위를 증명합니다.

출처 한국항공대학교 2022학년도 공학계열 본고사 2-3 · 보유 기출 원본 대조

C031 방정식의 실근이 없다는 증명

수학 + 수학 I + 수학 II

함수값의 범위와 부호로 실근의 부재를 증명하고 합성 유리함수가 최대·최소를 갖는 매개변수 조건을 정합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 1교시 문제 1 [2](1)-(2) · 대학 공식 원문 대조

C032 사잇값 정리로 실근의 개수와 위치 결정

수학Ⅱ · 사잇값 정리와 함수의 증가·감소

삼차방정식의 실근 개수와 위치를 판정하고, 그 근에 가장 가까운 정수를 결정합니다.

출처 한국항공대학교 2021학년도 입학계열 1-1 · 보유 기출 원본 대조

C033 두 적분조건이 보장하는 서로 다른 두 실근

수학Ⅱ · 정적분과 사잇값 정리

두 적분조건이 열린구간 안의 서로 다른 두 영점을 보장함을 증명하고 이차함수의 경우를 계산합니다.

출처 Blue Math 한국항공대 이학 기본 FINAL 제3회 2-3 · 기존 제작문항, 대학 공식 기출 아님

C034 사잇값정리와 세 구간의 합

수학·수학Ⅰ·수학Ⅱ

연속함수의 끝값만으로 직선과의 교점 및 일정한 길이 구간의 함수값 증가량을 보장합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 2-1 · 자체 예상문항

C035 네 실근에서 끌어내는 계수의 부등식

수학·수학Ⅰ·수학Ⅱ

사차식의 네 양의 실근으로 보조 삼차식의 실근 위치와 계수의 엄격한 부등식을 증명합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 2-2 · 자체 예상문항

C036 사잇값정리로 같은 값을 만드는 점을 찾고 유일성 증명

수학·수학Ⅰ·수학Ⅱ

자기 자신과 값이 같은 점의 존재·유일성을 증명하고 반복 대입의 유한 단계 오차 및 등호 예를 구합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 2-2 · 자체 예상문항

미분계수·롤의 정리·평균값 정리**C037 미분계수의 정의로 곱의 미분법 증명**

수학Ⅱ

미분계수의 정의에서 곱의 미분법을 유도하고 주어진 점의 미분계수를 계산합니다.

출처 한국항공대학교 2026학년도 입학계열 본고사 1-1 · 기존 기출 편집

C038 진동함수의 연속성과 미분가능성

수학 I · 수학 II · 원 (1)~(3)

진동함수의 원점 연속성과 미분가능성 조건을 차분몫과 크기 비교로 판정하며 도함수 연속성 문항은 다루지 않습니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 7-3 (원교재 PDF 43쪽) · 서울대 2006 정시 구술/ 한양대 2013 모의 변형 · 변형(교재 표기; 복수 출처); 대학 원문 별도 미대조 · 이번 권 수록: (1), (2), (3)

C039 반복된 근과 롤의 정리로 실근 다섯 개 확인

수학 + 수학 II

끝점의 중근과 롤의 정리를 반복 적용하여 다섯 번 미분한 다항식의 서로 다른 내부 실근 개수를 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 8-1 (원교재 PDF 47쪽) · 원대학·원시험 출처 미확인

C040 정적분의 평균값을 갖는 내부의 점

수학 II

연속함수의 적분 평균값이 열린구간 안의 한 함숫값과 같아짐을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 6-4 (원교재 PDF 39쪽) · 원대학·원시험 출처 미확인

C041 정적분의 평균값으로 평균값 정리 도출

수학 II

앞서 증명한 적분 평균값 성질로 도함수에 대한 평균값 정리를 도출합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 6-5 (원교재 PDF 40쪽) · 서울대 2008 정시 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C042 두 버스의 속도가 같아지는 시각

수학 II

동시에 출발하고 도착한 두 버스의 속도가 중간의 어떤 시각에 같아짐을 롤의 정리로 설명합니다.

출처 한국항공대학교 2021학년도 입학계열 1-2 · 롤의 정리를 문항에 명시한 기존 기출 편집

C043 두 자전거의 속도 관계를 보장하는 시점

수학 II

두 자전거의 서로 다른 출발·도착 조건에서 속도의 배수 관계와 차를 만족하는 내부 시각의 존재를 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-1 (원교재 PDF 49쪽) · 고려대 2009 모의 변형 · 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C044 여러 점의 미분계수와 그 역수의 합

수학II

함수의 끝값 조건에서 여러 점의 미분계수 합과 양의 미분계수 역수 합을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-2 (원교재 PDF 50쪽) · 한양대 2015 수시 변형 · 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C045 평균값 정리로 두 제곱근의 차 비교

수학·수학II

제곱근함수를 미분하지 않고 이차함수에 평균값 정리를 적용하여 두 제곱근의 차를 유리수 사이에 놓습니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-4 (원교재 PDF 52쪽) · 서강대 2013 수시 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C046 홀함수 조건으로 삼차함수 결정

수학·수학 I · 원 (1)

홀함수 조건과 지정된 함수값을 이용하여 삼차함수의 식을 결정하며 사인함수의 미분은 사용하지 않습니다.

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 1 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1)

C047 평균값정리를 적용할 구간을 직접 만드는 증명

수학·수학 I · 수학II

세 점에서의 미분계수 합과 임의의 개수의 점에서의 양의 미분계수 역수 합을 평균값 정리로 증명합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 2-3 · 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 9 문제 9-2 참고 재구성; 한양대 2015 수시 변형은 교재 표기이며 대학 원문 별도 미대조

C048 연속을 가정하지 않은 도함숫값의 증명

수학·수학 I · 수학II

도함수의 연속성을 가정하지 않고 중간 도함숫값의 존재를 증명한 뒤 정숫값 도함수를 갖는 함수를 결정합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 2-1 · 자체 예상문항

C049 끝점의 미분계수와 평균 기울기를 넘는 도함숫값

수학·수학 I · 수학II

끝점에서 수평인 접선을 갖는 함수가 내부에서 더 큰 기울기를 가져야 함을 증명하고 삼차식의 경우를 결정합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 2-4 · 자체 예상문항

C050 보조함수를 만들어 롤의 정리를 적용하기

수학·수학 I ·수학 II

두 함수의 차로 보조함수를 만들어 평균변화율의 비를 내부 미분계수의 비로 나타냅니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 2-1 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 평균변화율 비교 설명에서 출발한 자체 증명 변형

C051 도함수의 한 점 조건과 전체 구간의 등호

수학·수학 I ·수학 II

한 점의 엄격한 도함수 조건이 전체 구간의 엄격한 차이를 강제함을 증명하고 끝점 등호에서 함수를 결정합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 2-3 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 도함수 제한과 평균값 정리 발상 참고 변형

C052 함수식에서 미분계수를 직접 얻고 해의 존재를 증명

수학·수학 I ·수학 II

곱셈을 덧셈으로 바꾸는 함수식과 한 점의 미분가능성으로 전체 도함수 및 해의 존재·유일성을 증명합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제3회 2-4 · 『2026 시대인재 우주설 수리논술 엑셀시어 연세대』 문항 36의 함수식 및 (5) 참고 확장; 이화여대 2025학년도 모의논술은 교재 표기

증가·역함수와 정적분의 논증

C053 로그의 일대일성과 반복합성

수학·수학 I ·원 (2)~(4)

로그함수의 실근 개수와 반복 합성함수의 일대일 성질·함수값 합을 다루며 수열의 극한 문항은 제외합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 2교시 문제 1 [1](1)~(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2), (3), (4)

C054 로그의 밑 변환으로 만드는 원주율의 범위

수학 I

로그의 밑 변환 공식을 증명하고 주어진 수의 부등식으로 원주율의 로그 범위를 비교합니다.

출처 케임브리지대학교 입학 활용 시험 2018 · STEP I · 문제 2 도입부 및 (i)~(iii) · 대학 공식 원문 대조

C055 구간별 함수의 증가와 역함수

수학·수학 I ·수학 II

구간별 제곱근 함수의 증가와 역함수 존재를 증명하고 직사각형의 넓이 및 다항식 적분만으로 두 적분 값을 구합니다.

출처 이화여자대학교 2025학년도 수시 논술전형 · 자연계열 II 문제 2 (1)–(3) · 대학 공식 원문 대조

C056 적분으로 비교하는 오차의 크기

수학 II

정적분을 계산한 뒤 두 적분의 차를 다항식 적분으로 비교하여 오차를 제한합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 1교시 문제 2 [3](1)–(2) · 대학 공식 원문 대조

C057 적분구간이 한 점일 때의 함수값

수학 I ·수학 II · 원 (1)

적분구간의 양 끝이 같아지는 값을 직접 대입하여 초기 함수값을 결정합니다.

출처 이화여자대학교 2025학년도 수시 논술전형 · 자연계열 I 문제 3 (1)–(3) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1)

C058 구간별 로그함수의 연속성과 역함수

수학 I ·수학 II · 원 (1-1),(1-2)

구간별 로그·일차함수의 접합점 연속성과 전체 증가를 확인하여 역함수가 존재함을 증명합니다.

출처 한양대학교 서울 2026학년도 · 학생부종합(면접형) 제시문 면접 자연계열 수학 · 1번 · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1-1), (1-2)

C059 곡선과 직선 사이의 넓이 부등식

수학 II

삼차곡선과 직선의 교점·접선을 구하고 두 넓이의 차를 양수로 정리하여 넓이 부등식을 증명합니다.

출처 케임브리지대학교 입학 활용 시험 2018 · STEP I · 문제 1 전체 · 대학 공식 원문 대조

C060 공통접선의 고정점과 넓이의 비

수학·수학 II

유일한 교점을 다항식의 최솟값으로 바꾸어 접선의 고정점과 두 넓이의 비를 공통과목 범위에서 증명합니다.

출처 인하대학교 2025학년도 자연계열 오후 문제 2, 2-1-2-3 · 공개 재게시본 대조

C061 사인제공 유한함의 짝짓기

수학 I · 원 (1-1)

삼각함수의 대칭과 제곱함 항등식으로 주어진 유한함을 계산하며 미분·적분 문항은 제외합니다.

출처 인하대학교 2025학년도 자연계열 오전 문제 1, 1-1-1-3 · 공개 재게시본 대조 · 이번 권 수록: (1-1)

C062 적분과 미분의 관계를 정의로 설명하기

수학 II

연속함수의 누적 적분을 차분몫으로 미분하고 이를 이용해 정적분과 원시함수 끝값의 관계를 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 13-1 (원교재 PDF 84쪽) · 인하대 2011 모의 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

C063 적분으로 정의한 함수와 내점의 존재

수학 II

곱의 미분법과 정적분의 관계를 직접 연결하여 적분 등식·내점의 존재·전체 구간 영함수 조건의 동치를 증명합니다.

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 3 (1)-(4) · 대학 공식 원문 대조

C064 로그수열의 증가 증명

수학 I · 원 (2)

로그의 증가성과 양의 분수의 유한한 대소 비교만으로 새 수열의 증가성을 증명합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 1교시 문제 1 [1](1)-(2) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2)

C065 정적분으로 정의한 수의 존재와 위치

수학 II · 원 (i)~(v)

다항식 적분이 영이 되는 양수의 존재·유일성과 두 구체적인 경우의 위치를 증명하며 수열 극한은 제외합니다.

출처 옥스퍼드대학교 2022 · MAT · 문제 3 (i)-(vi) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (i), (ii), (iii), (iv), (v)

C066 평균값 정리에서 정적분 부등식과 등호까지

수학 II · 평균값 정리와 정적분

도함수의 하한으로 정적분 부등식을 증명하고 등호가 성립하는 함수를 모두 찾습니다.

출처 한국외대 글로벌 워크북 W28 · 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 11 문제 11-4의 발상을 재설계

C067 정적분의 가중평균과 이차함수의 정확한 오차

수학·수학 I ·수학 II

가중평균값을 갖는 내점의 존재를 증명하고 이차함수의 정확한 적분 오차와 모든 등호 함수를 구합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제1회 2-4 · 자체 예상문항

C068 적분의 부호에서 두 도함숫값의 차까지

수학·수학 I ·수학 II

끝점의 양숫값과 영인 적분값에서 두 영점 및 두 미분계수 차의 엄격한 하한을 이끌어냅니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 2-2 · 자체 예상문항

C069 적분 등식이 강제하는 함수값의 범위

수학·수학 I ·수학 II

함수와 제곱의 적분값이 같으면 함수가 기본 범위를 벗어나야 함을 증명하고 모든 이차식 예를 구합니다.

출처 Blue Math 기존 최종점검 제2회 2-3 · 자체 예상문항

경우의 수와 좌표·도형의 증명

C070 대응으로 세는 제한된 경로

수학 · 경우의 수와 조합

최초로 조건을 어긴 지점에서 경로를 반사하는 일대일 대응으로 제한된 경로의 수를 구합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 22 문제 22-3 (원교재 PDF 149쪽) · 교재 표기: 연세대 (원주) 2012 수시 변형. 대학 원문 미대조.

C071 두 집단의 조합으로 세는 제곱합

수학 · 조합 · 원 (1)

두 집단에서 정해진 인원을 고르는 경우를 나누어 조합의 제곱합을 증명하며 원문 (1)만 독립적으로 다룹니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 22 문제 22-4 (원교재 PDF 150쪽) · 교재 표기: 서울대 2002 수시 변형. 대학 원문 미대조. · 이번 권 수록: (1)

C072 접선과 사인·코사인법칙으로 길이 증명

수학 I

원의 접선과 삼각형의 각 관계를 증명하고 사인법칙·코사인법칙으로 두 선분의 길이를 구합니다.

출처 한국항공대학교 2025학년도 공학계열 본고사 2-2(1)-(3) · 보유 기출 원본 대조

C073 변하는 삼각형의 일정한 외접원 반지름

수학 + 수학 I

변하는 삼각형에서 한 각의 크기가 일정함을 확인하고 외접원의 반지름이 일정함을 증명합니다.

출처 한국항공대학교 2021학년도 공학계열 본고사 2-1(3) · 보유 기출 원본 대조

C074 포물선 접선과 접원의 두 불변량

수학 + 수학 II

포물선 위의 점이 움직일 때 두 길이식이 일정함을 증명하고 원의 둘레와 길이 제곱의 비의 극한을 구합니다.

출처 성균관대학교 2025학년도 · 논술우수전형 수리형 1교시 · 1번 · 대학 공식 원문 대조

C075 포물선의 두 접선과 초점의 각

수학·수학 I · 수학 II

이차함수의 접선식과 삼각형의 코사인법칙만으로 포물선의 두 접선 교점 및 초점에서의 각 이등분선 성질을 증명합니다.

출처 케임브리지대학교 입학 활용 시험 2011 · STEP I · 문제 4 전체 · 대학 공식 원문 대조

C076 두 교점의 중점이 그리는 자취

수학 · 이차방정식과 좌표 · 원 (2)

주어진 이차방정식과 직선의 두 교점에 근과 계수의 관계를 적용하여 중점의 자취와 제외되는 끝점을 구합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 19 문제 19-2 (원교재 PDF 136쪽) · 교재 표기: 연세대 2008 예시/아주대 2009 예시/아주대 2013 수시/서울대 2008 예시. 소문항별 원출처 미확인. · 이번 권 수록: (2)

C077 타원의 초점을 지나는 두 수직선

수학·수학 II

거리의 합에서 곡선의 방정식을 직접 유도하고 이차방정식의 근의 관계로 현의 불변량과 수직인 두 현의 비를 증명합니다.

출처 성균관대학교 2025학년도 · 과학인재전형 제시문면접·구술 2교시 수학 · 1번 · 대학 공식 원문 대조

대표 문제·해설 샘플 안내

이어서 제시하는 샘플은 다음 세 학습 묶음의 문제와 상세해설 전체입니다. 상세해설 뒤에 별도의 제출용 모범답안이 오는 구성도 함께 확인할 수 있습니다.

C014 등차수열과 등비수열의 대소관계

등차수열과 등비수열을 같은 초항에서 시작할 때 세 번째 항 이후의 대소관계를 수학적 귀납법으로 증명합니다.

C045 평균값 정리로 두 제곱근의 차 비교

제곱근함수를 미분하지 않고 이차함수에 평균값 정리를 적용하여 두 제곱근의 차를 유리수 사이에 놓습니다.

C063 적분으로 정의한 함수와 내점의 존재

곱의 미분법과 정적분의 관계를 직접 연결하여 적분 등식·내점의 존재·전체 구간 영함수 조건의 동치를 증명합니다.

샘플 하단의 쪽수는 원래 판매 PDF 쪽수를 유지합니다. 이 미리보기 파일의 PDF 쪽수와 구별하세요. 샘플의 파일 이동 링크는 제거하여 미리보기 안에서 존재하지 않는 파일을 열지 않도록 했습니다.

C014 등차수열과 등비수열의 대소관계

범위 수학 I

출처 한국항공대학교 2024학년도 입학계열 1-3 · 원문의 세 소문항을 통합한 기존 기출 편집

$h > 0$ 이고 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + h, \quad b_{n+1} = (1 + h)b_n$$

을 만족한다. 모든 자연수 $n \geq 3$ 에 대하여 $b_n > a_n$ 임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

C014 등차수열과 등비수열의 대소관계

범위 수학 I

출처 한국항공대학교 2024학년도 입학계열 1-3 · 원문의 세 소문항을 통합한 기존 기출 편집

증명 방법 수학적 귀납법

단계별 상세해설

핵심 결론

모든 $n \geq 3$ 에서 $b_n > a_n$.

1. 처음 두 항이 같으므로 시작 번호를 먼저 확인합니다

$a_1 = b_1 = 1$ 이고 $a_2 = b_2 = 1 + h$ 입니다. 따라서 처음부터 엄격한 부등식이 성립하는 것은 아닙니다. 세 번째 항을 계산하면

$$a_3 = 1 + 2h, \quad b_3 = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

이므로 $h > 0$ 에서 $b_3 - a_3 = h^2 > 0$ 입니다. 이것이 귀납법의 시작입니다.

2. 귀납가정과 다음 번호의 목표를 구별합니다

어떤 자연수 $k \geq 3$ 에 대하여 $b_k > a_k$ 라고 가정합니다. 보일 것은 $b_{k+1} > a_{k+1}$ 입니다. 두 이웃한 항 사이의 관계식의 연산이 다르므로, 단순히 두 식에 같은 수를 더했다고 말할 수는 없습니다. 다음 항의 차를 계산해 귀납가정이 나타나게 만들겠습니다.

$$\begin{aligned} b_{k+1} - a_{k+1} &= (1 + h)b_k - (a_k + h) \\ &= (1 + h)(b_k - a_k) + h(a_k - 1). \end{aligned}$$

3. 각 항의 부호를 확인한 뒤 다음 단계로 넘깁니다

등차수열의 일반항은 $a_k = 1 + (k - 1)h$ 이므로 $a_k - 1 = (k - 1)h > 0$ 입니다. 또한 $1 + h > 0$ 이고 귀납가정에 의해 $b_k - a_k > 0$ 입니다. 따라서 위 식의 첫 항과 둘째 항이 모두 양수이며 $b_{k+1} - a_{k+1} > 0$ 입니다. $n = 3$ 의 성립과 k 에서 $k + 1$ 로 넘어가는 과정이 확인되었으므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 $n \geq 3$ 에서 $b_n > a_n$ 입니다.

제출용 모범답안

$a_3 = 1 + 2h, b_3 = 1 + 2h + h^2$ 이므로 $b_3 > a_3$ 이다. $k \geq 3$ 에서 $b_k > a_k$ 를 가정하면 $a_k = 1 + (k - 1)h > 1$ 이고

$$b_{k+1} - a_{k+1} = (1 + h)(b_k - a_k) + h(a_k - 1) > 0.$$

따라서 $k + 1$ 에서도 성립한다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 3$ 에서 $b_n > a_n$ 이다.

C045 평균값 정리로 두 제곱근의 차 비교

범위 수학·수학Ⅱ

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-4 (원교재 PDF 52쪽) · 서강대 2013 수시 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

평균값 정리를 이용하여 부등식

$$\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}$$

가 됨을 설명하시오.

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

C045 평균값 정리로 두 제곱근의 차 비교

범위 수학·수학Ⅱ

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-4 (원교재 PDF 52쪽) · 서강대 2013 수시 · 기출(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

증명 방법 제곱 다항식에 평균값 정리 적용 · 양수의 역수 비교

핵심 결론 $\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}$ 입니다.

어떤 함수에 평균값 정리를 적용할까요?

구해야 하는 것은 두 제곱근의 차이이지만, 제곱근을 포함한 함수를 미분할 필요는 없습니다. 다항함수

$$F(t) = t^2$$

에 $\sqrt{101}$ 과 $\sqrt{119}$ 를 넣으면 함수값은 각각 101과 119가 됩니다. 이 선택을 하면 평균값 정리에 나타나는 **구간의 길이**가 바로 구하려는 $\sqrt{119} - \sqrt{101}$ 이 됩니다. 함수값의 차이는 18로 간단해지고, 도함수도 $F'(t) = 2t$ 라는 다항식입니다.

정리의 가정과 적용 구간을 확인합니다

다항함수 $F(t) = t^2$ 는 닫힌구간 $[\sqrt{101}, \sqrt{119}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(\sqrt{101}, \sqrt{119})$ 에서 미분가능합니다. 또 $101 < 119$ 이므로 구간의 양 끝은 서로 다릅니다. 따라서 평균값 정리에 의해

$$\frac{F(\sqrt{119}) - F(\sqrt{101})}{\sqrt{119} - \sqrt{101}} = F'(c)$$

를 만족시키는 $c \in (\sqrt{101}, \sqrt{119})$ 가 적어도 하나 존재합니다. 함수값과 도함수를 대입하면

$$\frac{18}{\sqrt{119} - \sqrt{101}} = 2c, \quad \sqrt{119} - \sqrt{101} = \frac{9}{c}$$

입니다. 여기서 $c > 0$ 이므로 $2c$ 로 나누어도 됩니다.

내점의 범위를 이용하여 엄격한 부등식을 얻습니다

$100 < 101 < 119 < 121$ 이고 양의 제곱근을 취하면 순서가 유지되므로

$$10 < \sqrt{101} < c < \sqrt{119} < 11$$

입니다. 특히 $10 < c < 11$ 입니다. 양수의 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀌므로

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{c} < \frac{1}{10}.$$

각 항에 양수 9를 곱하고 앞에서 구한 $\frac{9}{c}$ 를 대입하면

$$\boxed{\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}}$$

을 얻습니다. c 는 평균값 정리가 보장하는 **내점**이므로 위의 부등호들은 엄격한 부등호입니다. c 의 정확한 값이나 제곱근의 소수 근삿값을 구할 필요는 없습니다.

제출용 모범답안

$F(t) = t^2$ 는 $[\sqrt{101}, \sqrt{119}]$ 에서 연속이고 $(\sqrt{101}, \sqrt{119})$ 에서 미분가능하다. 평균값 정리에 의해 어떤 $c \in (\sqrt{101}, \sqrt{119})$ 에 대하여

$$18 = F(\sqrt{119}) - F(\sqrt{101}) = F'(c)(\sqrt{119} - \sqrt{101}) = 2c(\sqrt{119} - \sqrt{101})$$

이다. 따라서 $\sqrt{119} - \sqrt{101} = \frac{9}{c}$ 이다. $10 < \sqrt{101} < c < \sqrt{119} < 11$ 이므로 $\frac{1}{11} < \frac{1}{c} < \frac{1}{10}$ 이다. 양수 9를 곱하면

$$\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}$$

을 얻는다.

C063 적분으로 정의한 함수와 내점의 존재

범위 수학 II

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 3 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $H(x)$ 를

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_x^1 f(t) dt \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

라 할 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $H(x)$ 가 연속임을 보이시오.

(2) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$$

(3) $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$ 일 때, 다음 등식을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$$

(4) $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 0 \iff H(x) = 0$$

임을 보이시오.

원문 해석 안내: (4)는 공식 예시답안과 채점기준에 따라, “ $(-1, 2)$ 의 모든 x 에서 $f(x) = 0$ ”과 “ $(-1, 2)$ 의 모든 x 에서 $H(x) = 0$ ”의 동치를 뜻한다. 특정 한 점에서의 함숫값이 0인 점 동치로 읽지 않는다. 위 발문은 원문을 보존했다.

개별 공식 배점: (1) 7점, (2) 9점, (3) 10점, (4) 4점.

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

C063 적분으로 정의한 함수와 내점의 존재

범위 수학 II

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 3 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조

증명 방법 곱의 미분법과 정적분의 관계 · 롤의 정리 · 항등적 영함수

핵심 결론 $H'(x) = 2f(x)$ ($-1 < x < 2$). (3)은 H 를 다시 적분하여 만든 함수에 롤의 정리를 적용합니다. (4)는 두 함수가 구간 전체에서 항등적으로 0인 성질의 동치입니다.

조건을 한 번 정리합니다

적분구간의 방향을 포함한 정적분의 성질로

$$\int_x^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

입니다. $A = \int_0^1 f(t) dt$ 와 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 를 두면

$$H(x) = 2F(x) - A.$$

A 는 x 와 관계없는 상수입니다. 이 표현은 $x < 0$ 이나 $x > 1$ 에서도 적분구간의 방향을 그대로 적용하면 성립합니다. H 를 두 적분의 차로만 보지 않고 누적함수의 두 배에서 상수를 뺀 것으로 보면 미분, 적분, 함수값이 0인 점의 의미가 연결됩니다.

(1) 미분가능성을 먼저 확보합니다

f 가 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 적분과 미분의 관계에 의해

$$F'(x) = f(x) \quad (-1 < x < 2).$$

따라서 $H(x) = 2F(x) - A$ 도 이 열린구간에서 미분가능하고

$$H'(x) = 2f(x)$$

입니다. 미분가능한 함수는 연속이므로 H 는 $(-1, 2)$ 에서 연속입니다. 여기서 f' 의 존재는 요구되지 않습니다. 연속인 f 를 적분해 만든 F 의 미분가능성을 사용한 것입니다.

뒤에서 쓰는 $[0, 1]$ 은 $(-1, 2)$ 안에 들어 있습니다. 따라서 0과 1에서도 H 의 연속성이 이미 확보되어 있으며, H 는 $[0, 1]$ 에서 연속입니다. 이 포함 관계가 롤의 정리의 닫힌구간 조건을 보장합니다.

(2) 곱의 미분법으로 목표식에 필요한 두 항을 만듭니다

목표식에는 H 의 적분과 $xf(x)$ 의 적분이 함께 나타납니다. (1)에서 $H' = 2f$ 를 구했으므로, H 에 x 를 곱한 함수

$$J(x) = xH(x)$$

를 생각하겠습니다. 곱을 미분하면 x 를 미분한 항에서 H 가 그대로 나오고, H 를 미분한 항에서 $2xf$ 가 나오기 때문입니다. 여기서는 특정한 함수 J 의 도함수를 직접 구하여 정적분과 미분의 관계를 적용합니다.

H 는 $[0, 1]$ 을 포함하는 열린구간에서 미분가능하고 $H' = 2f$ 입니다. 곱의 미분법에 의해

$$J'(x) = 1 \cdot H(x) + xH'(x) = H(x) + 2xf(x).$$

H 와 f 가 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 J' 도 이 닫힌구간에서 연속입니다. 따라서 정적분과 미분의 관계를 적용할 수 있고,

$$\begin{aligned} J(1) - J(0) &= \int_0^1 J'(x) dx \\ &= \int_0^1 H(x) dx + 2 \int_0^1 xf(x) dx \end{aligned}$$

입니다. 이제 왼쪽의 끝값을 확인하겠습니다. 정의에서

$$H(1) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^1 f(t) dt = A$$

이므로 $J(1) = 1 \cdot H(1) = A$ 이고, $J(0) = 0 \cdot H(0) = 0$ 입니다. 따라서

$$A = \int_0^1 H(x) dx + 2 \int_0^1 xf(x) dx.$$

이를 정리하고 A 의 정의를 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(x) dx &= A - 2 \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx \end{aligned}$$

를 얻습니다. 적분변수 t 와 x 는 해당 정적분 안에서만 쓰이는 문자이므로 A 를 나타낼 때 문자를 바꾸어도 적분값은 변하지 않습니다.

(3) 목표를 $H(c) = 0$ 으로 바꾸고 한 번 더 적분합니다

1단계 목표식과 주어진 조건을 각각 바꿉니다. 원하는 등식은 정의에 의해 정확히 $H(c) = 0$ 입니다. 한편 (2)와 조건으로부터

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 xf(x) dx = 0.$$

즉, 함수값 $H(c) = 0$ 을 찾아야 하는데 현재 주어진 정보는 H 의 적분값이 0이라는 사실입니다.

2단계 왜 새 보조함수를 만드는가. 롤의 정리는 양 끝의 함수값이 같으면 내점에서 도함수가 0인 점을 줍니다. 따라서 그 도함수가 H 가 되도록

$$G(x) = \int_0^x H(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

를 설정합니다. 그러면 H 의 적분값이 0이라는 조건이 $G(1) = G(0)$ 이라는 롤의 정리의 끝점 조건으로 바뀝니다.

3단계 롤의 정리의 세 조건을 확인합니다. H 가 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 G 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $(0, 1)$ 에서 미분가능하며 $G'(x) = H(x)$ 입니다. 또

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \int_0^1 H(t) dt = 0.$$

따라서 롤의 정리에 의해

$$G'(c) = 0 \quad \text{인 } c \in (0, 1)$$

가 적어도 하나 존재합니다. $G'(c) = H(c)$ 이므로

$$0 = H(c) = \int_0^c f(x) dx - \int_c^1 f(x) dx,$$

즉 요구한 등식이 성립합니다.

끝점과 내점을 혼동하지 않기. $G(0) = G(1) = 0$ 은 정리를 적용하는 조건이고, 결론의 c 는 양 끝을 제외한 $(0, 1)$ 에 있습니다. H 에 직접 롤의 정리를 적용하면 결론은 $H'(c) = 2f(c) = 0$ 이 되어 목표인 $H(c) = 0$ 과 달라집니다. 이 때문에 H 를 한 번 더 적분해야 합니다. 또한 원문은 “적어도 하나”를 요구합니다. 예를 들어 $f \equiv 0$ 이면 모든 $c \in (0, 1)$ 가 성립하므로 유일성을 주장해서는 안 됩니다.

사잇값 정리로 확인하는 보충 논증. H 가 $(0, 1)$ 에서 한 번도 0이 되지 않는다고 가정하겠습니다. 연속성과 사잇값 정리에 의해 H 는 이 구간에서 계속 양수이거나 계속 음수입니다. 양수인 경우 연속성에 의해 양 끝에서는 $H \geq 0$ 이며, 내점 하나의 작은 닫힌 근방에서 양의 하한을 가지므로 $\int_0^1 H > 0$ 입니다. 음수인 경우에는 반대로 $\int_0^1 H < 0$ 입니다. 두 경우 모두 적분값이 0이라는 사실과 모순입니다. 이 방법도 가능하지만, 원문의 공식 해설은 누적함수 G 에 롤의 정리를 적용하는 간결한 방법을 사용합니다.

(4) 항등적인 영함수라는 두 명제를 비교합니다

공식 해설에서 의도한 명제는 다음과 같습니다.

$$[\text{모든 } x \in (-1, 2) \text{에서 } f(x) = 0] \iff [\text{모든 } x \in (-1, 2) \text{에서 } H(x) = 0].$$

먼저 $(-1, 2)$ 의 모든 x 에서 $f(x) = 0$ 이라고 하겠습니다. $x \in (-1, 2)$ 이면 0에서 x 까지와 x 에서 1까지의 적분구간은 모두 $(-1, 2)$ 안에 있으므로 두 적분값이 0입니다. 따라서 모든 $x \in (-1, 2)$ 에 대해 $H(x) = 0$ 입니다.

역으로 $(-1, 2)$ 의 모든 x 에서 $H(x) = 0$ 이면 H 는 그 구간에서 영함수이므로 $H'(x) = 0$ 입니다. (1)에서 구한 $H'(x) = 2f(x)$ 를 적용하면 모든 $x \in (-1, 2)$ 에 대해 $f(x) = 0$ 입니다. 양방향 모두 보였으므로 동치가 성립합니다.

특정 한 점에 관한 주장으로 바꾸면 거짓입니다. $f(x) = 1$ 이면 $H(x) = 2x - 1$ 이므로 $H(\frac{1}{2}) = 0$ 이지만 $f(\frac{1}{2}) = 1$ 입니다. 따라서 “어떤 한 점에서 $H = 0$ 이면 그 점에서 $f = 0$ ”이라는 논증을 하면 안 됩니다. 한 점에서의 값이 0인 것과 구간 전체에서 영함수인 것은 다릅니다. 문제편의 발문은 보존하되 이 양화 범위는 공식 예시답안에 맞게 읽습니다.

제출용 모범답안

(1) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $A = \int_0^1 f(t) dt$ 라 두면 $H(x) = 2F(x) - A$ 이다. f 가 연속이므로 $F'(x) = f(x)$ ($-1 < x < 2$)이고, 따라서 $H'(x) = 2f(x)$ 이다. 미분가능한 함수는 연속이므로 H 는 $(-1, 2)$ 에서 연속이다.

(2) $J(x) = xH(x)$ 라 두면 곱의 미분법에 의해 $J'(x) = H(x) + 2xf(x)$ 이다. H 와 f 가 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 J' 도 연속이다. 또한 $J(0) = 0$, $J(1) = H(1) = A$ 이다. 정적분과 미분의 관계에 의해

$$A = J(1) - J(0) = \int_0^1 J'(x) dx = \int_0^1 H(x) dx + 2 \int_0^1 xf(x) dx.$$

그러므로

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx.$$

(3) 조건과 (2)에 의해 $\int_0^1 H(x) dx = 0$ 이다. $G(x) = \int_0^x H(t) dt$ 라 두면 H 의 연속성에 의해 G 는 $[0, 1]$ 에서 연속, $(0, 1)$ 에서 미분가능하고 $G'(x) = H(x)$ 이다. 또 $G(0) = G(1) = 0$ 이다. 롤의 정리에 의해 $G'(c) = H(c) = 0$ 인 $c \in (0, 1)$ 가 적어도 하나 존재한다. 따라서 $\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$ 이다.

(4) 모든 $x \in (-1, 2)$ 에 대해 $f(x) = 0$ 이면 정의에 의해 모든 $x \in (-1, 2)$ 에서 $H(x) = 0$ 이다. 역으로 모든 $x \in (-1, 2)$ 에서 $H(x) = 0$ 이면 $H'(x) = 0$ 이고, $H'(x) = 2f(x)$ 이므로 모든 $x \in (-1, 2)$ 에서 $f(x) = 0$ 이다.

감점 점검과 다음 문제에 남길 판단

$\int_x^1 f$ 를 미분할 때 부호를 확인합니다. 적분값이 0이라는 사실만으로 피적분함수가 영함수라고 주장하지 않습니다. 롤의 정리의 적용 대상은 G , 적용 구간은 $[0, 1]$, 얻는 점은 $(0, 1)$ 입니다. (4)에서는 “모든 x ”의 범위를 양쪽 명제에 각각 붙입니다. 공식 배점은 7·9·10·4점입니다.