

수리논술 증명 스페셜

선택편

미적분·확률과 통계·기하

미리보기 · 전체 수록목록과 대표 샘플

조건을 읽고, 정리를 선택하고, 끝까지 증명합니다.

미적분·확률과 통계·기하 중 해당 과목이 시험범위인 모든 수리논술 대학 지원자를 위한 범용 자료입니다. 지원 대학의 모집요강과 출제범위를 확인하여 필요한 과목을 선택하세요.

E001-E026 | 26개 학습 묶음

원문 제시문과 연결 조건 · 이해용 상세해설 · 제출용 모범답안

이 책에는 어떤 증명이 있나요?

선택편 · 39,000원

다음 목록은 이 상품의 전체 수록 범위입니다. 각 문항의 제목뿐 아니라 무엇을 증명하고 어떤 조건·판단을 배우는지, 실제 확인된 출처까지 보여 드립니다. 목록 뒤에는 최종 문제편과 상세해설에서 가져온 대표 샘플을 이어 붙였습니다. 샘플의 번호와 수학 본문은 판매 본문과 같습니다.

선택 26학습목음은 미적분18·확률과 통계5·기하3으로 구성됩니다. 과목별 학습량은 같지 않으며 미적분 비중이 높습니다. 지원 대학에 포함되는 선택과목의 증명을 골라 연습하는 엄선 자료입니다. 특정 대학 전용이나 세 과목 전 기출 완결집은 아닙니다.

두 권은 각각 독립 판매합니다. 선택편의 연결 조건은 선택편 안에서 확인할 수 있습니다.

문항 수는 연결된 원문과 소문항의 학습 목음 기준입니다. 분리한 같은 원형의 소문항을 각각 새 고유 문제로 홍보하지 않습니다.

미적분

E001 지수함수와 삼각함수로 정의된 함수의 미분가능성

수학Ⅱ + 미적분 · 복합

지수적 감소와 삼각함수의 진동이 결합된 함수의 원점 미분가능성과 도함수의 연속성을 확인합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 7-2 (원교재 PDF 42쪽) · 서강대 2013 수시 변형 · 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

E002 진동함수의 도함수 연속 조건

수학Ⅰ·수학Ⅱ + 미적분 · 원 (4)

진동함수의 도함수를 구하고 거듭제곱의 지수에 따라 원점에서 도함수가 연속일 필요충분조건을 판정합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 7-3 (원교재 PDF 43쪽) · 서울대 2006 정시 구술/ 한양대 2013 모의 변형 · 변형(교재 표기; 복수 출처); 대학 원문 별도 미대조 · 이번 권 수록: (4)

E003 서로 다른 실근과 변곡점의 개수

수학 + 수학Ⅱ + 미적분 · 복합

서로 다른 여러 실근을 갖는 다항함수에서 실제 오목·볼록이 바뀌는 변곡점의 개수를 확보합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 8-2 (원교재 PDF 48쪽) · 원대학·원시험 출처 미확인

E004 삼각함수에 평균값 정리 적용

수학Ⅱ + 미적분 · 복합

적절한 사인함수와 길이 1인 구간을 선택하여 주어진 등식을 만족하는 내점의 존재를 보입니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 2교시 문제 1 [2] · 대학 공식 원문 대조

E005 평균값 정리로 지수함수 부등식 증명

수학Ⅱ + 미적분 · 복합

평균값 정리를 이용하여 양의 입력에서 지수함수가 일차식보다 큼을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 9-3 (원교재 PDF 51쪽) · 한양대 2013 수시 변형 · 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

E006 사인함수와 삼차함수의 대소 관계

수학Ⅰ·수학Ⅱ + 미적분 · 원 (2)~(4)

사인함수의 직선 비교 부등식을 증명하고 삼차함수와 도함수가 같아지는 내점의 유일성 및 두 함수의 대소관계를 보입니다.

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열Ⅰ 문제 1 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2), (3), (4)

E007 로그 그래프의 선분 길이와 수열의 극한

수학 I + 미적분 · 원 (1)

로그함수 그래프의 두 교점 사이 길이를 구하여 그 길이비의 수열 극한을 계산합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 2교시 문제 1 [1](1)-(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1)

E008 증가함수와 역함수의 정적분

수학 + 미적분 · 복합

도함수 조건에서 곱함수의 증가와 역함수 존재를 확인하고 역함수의 정적분을 나타냅니다.

출처 이화여자대학교 2025학년도 수시 논술전형 · 자연계열 I 문제 1 (1)-(3) · 대학 공식 원문 대조

E009 절댓값 삼각함수의 미분가능성과 증가

수학 I + 수학 II + 미적분 · 복합

절댓값 삼각함수의 접합점 미분가능성·증가성·근의 개수와 역함수의 미분조건을 판단합니다.

출처 서강대학교 2025학년도 자연계열 2차 문제 2, 2-1-2-4 · 공개 재게시본 대조

E010 로그 보조함수와 값의 존재 및 유일성

수학 II + 미적분 · 복합

밑과 지수가 동시에 변하는 함수의 두 극한과 감소성을 확인하고 정해진 값을 갖는 점의 존재·유일성을 증명합니다.

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 II 문제 2 (1)-(3) · 대학 공식 원문 대조

E011 적분으로 주어진 함수의 식과 극값

미적분 · 원 (2),(3)

적분방정식에 부분적분을 적용하여 누적 적분의 영점과 원함수의 식·극값을 구합니다.

출처 이화여자대학교 2025학년도 수시 논술전형 · 자연계열 I 문제 3 (1)-(3) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2), (3)

E012 역함수 적분과 곱의 정적분 부등식

수학 I · 수학 II + 미적분 · 원 (1-3),(1-4)

구간별 역함수의 적분을 구하고 매개변수 조건과 함수값 범위로 두 함수 곱의 정적분 부등식을 증명합니다.

출처 한양대학교 서울 2026학년도 · 학생부종합(면접형) 제시문 면접 자연계열 수학 · 1번 · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1-3), (1-4)

E013 부분적분으로 판단하는 정적분의 부호

수학 I · 수학 II + 미적분 · 원 (1-2), (1-3)

지수함수와 삼각함수의 곱을 적분하고 도함수 관계 및 부분적분으로 다른 정적분의 엄격한 부호를 증명합니다.

출처 인하대학교 2025학년도 자연계열 오전 문제 1, 1-1-1-3 · 공개 재게시본 대조 · 이번 권 수록: (1-2), (1-3)

E014 삼각함수의 오차를 이용한 정적분 부등식

미적분 · 독립

사인함수의 다항식 근사 오차의 최대·최소를 구하고 이를 삼각함수 정적분의 오차 평가에 사용합니다.

출처 도쿄대학교 2026 · 제2차 학력시험 전기일정 수학(이과) · 제1문 (1)-(2) · 대학 공식 원문 대조

E015 임의의 대표점으로 만든 구분구적합의 수렴

미적분 · 독립

증가함수의 임의 대표점 합을 같은 상합·하합 사이에 놓아 넓이로의 수렴을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 12-3 (원교재 PDF 76쪽) · 서울시립대 2015 모의 / 한양대 2012 모의 변형(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

E016 로그수열의 기본극한

수학 I + 미적분 · 원 (1)

로그 수열의 식을 미분계수의 정의와 연결하여 지정된 수열의 극한을 구합니다.

출처 광운대학교 2024학년도 자연 1교시 문제 1 [1](1)-(2) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (1)

E017 적분의 영점으로 정의한 수열의 극한

수학 II + 미적분 · 원 (vi)

누적 적분의 양수 부분을 거듭제곱으로 아래에서 비교하여 적분의 영점으로 정한 수열의 극한을 증명합니다.

출처 옥스퍼드대학교 2022 · MAT · 문제 3 (i)-(vi) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (vi)

E018 삼각함수의 정적분으로 얻는 수열의 극한

수학 I + 미적분 · 복합

삼각함수 적분의 점화식을 증명하고 적분비와 홀짝 곱의 극한을 연결합니다.

출처 이화여자대학교 2025학년도 수시 논술전형 · 자연계열 II 문제 3 (1)-(3) · 대학 공식 원문 대조

확률과 통계

E019 이항전개로 증명하는 조합항등식

확률과 통계 · 원 (2)

이항정리를 이용하여 같은 다항식의 계수를 두 방식으로 비교하고 일반적인 조합의 합 항등식을 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 22 문제 22-4 (원교재 PDF 150쪽) · 교재 표기: 서울대 2002 수시 변형. 대학 원문 미대조. · 이번 권 수록: (2)

E020 짝짓기에 관계없이 일정한 평균

확률과 통계 · 독립

정수들을 어떻게 짝지어도 같은 확률로 한 쌍을 고를 때의 기댓값은 바뀌지 않음을 설명합니다.

출처 연세대학교 서울캠퍼스 2024학년도 · 수시모집 논술전형 자연계열 수학 · 3-1 · 대학 공식 원문 대조

E021 기댓값과 분산 공식을 정의로 증명

확률과 통계 · 독립

확률분포의 정의에서 일차변환의 기댓값·분산 공식과 제곱의 기댓값 관계를 직접 증명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 23 문제 23-1 (원교재 PDF 157쪽) · 교재 표기: 서강대 2012 수시. 대학 원문 미대조.

E022 거스름돈을 줄 수 있는 줄의 확률

확률과 통계 · 독립

처음 거스름돈을 줄 수 없는 위치를 나누어 모든 손님에게 판매할 확률을 구합니다.

출처 케임브리지대학교 입학 활용 시험 2011 · STEP I · 문제 12 (i)–(iii) · 대학 공식 원문 대조

E023 조건부확률의 방향을 바꾼 주장의 반박

확률과 통계 · 독립

검사의 적중률과 양성 판정 뒤의 실제 확률을 구별하여 조건부확률의 방향을 바꾼 주장을 반박합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 22-9 (원교재 PDF 155쪽) · 고려대 2008 수시(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

기하

E024 타원의 반사 성질과 중심 작도

수학 + 기하 · 원 (1),(3)

타원의 접선에 대한 반사 성질을 벡터로 증명하고 서로 다른 방향의 평행한 현의 중점으로 중심을 찾는 원리를 설명합니다.

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 Lecture 19 문제 19-2 (원교재 PDF 136쪽) · 교재 표기: 연세대 2008 예시/아주대 2009 예시/아주대 2013 수시/서울대 2008 예시. 소문항별 원출처 미확인. · 이번 권 수록: (1), (3)

E025 평면벡터의 조건으로 내적의 양수성 증명

수학Ⅱ + 기하

곱의 미분법과 벡터의 평행·수직·길이 조건을 연결하여 주어진 내적의 양수성을 증명합니다.

출처 연세대학교 서울캠퍼스 2025학년도 · 수시모집 논술전형(추가시험) 자연계열 수학 · 3-3 · 대학 공식 원문 대조

E026 계속 생성되는 반직선이 한 점을 지나지 못함의 증명

기하 · 독립

반직선을 계속 생성하는 규칙에서 유지되는 내적의 부호를 찾아 특정 점을 지날 수 없음을 증명합니다.

출처 연세대학교 서울캠퍼스 2024학년도 · 수시모집 논술전형 자연계열 수학 · 4-1, 4-2 · 대학 공식 원문 대조

대표 문제·해설 샘플 안내

이어서 제시하는 샘플은 다음 세 학습 묶음의 문제와 상세해설 전체입니다. 상세해설 뒤에 별도의 제출용 모범답안이 오는 구성도 함께 확인할 수 있습니다.

E006 사인함수와 삼차함수의 대소 관계

사인함수의 직선 비교 부등식을 증명하고 삼차함수와 도함수가 같아지는 내점의 유일성 및 두 함수의 대소관계를 보입니다.

E023 조건부확률의 방향을 바꾼 주장의 반박

검사의 적중률과 양성 판정 뒤의 실제 확률을 구별하여 조건부확률의 방향을 바꾼 주장을 반박합니다.

E025 평면벡터의 조건으로 내적의 양수성 증명

곱의 미분법과 벡터의 평행·수직·길이 조건을 연결하여 주어진 내적의 양수성을 증명합니다.

샘플 하단의 쪽수는 원래 판매 PDF 쪽수를 유지합니다. 이 미리보기 파일의 PDF 쪽수와 구별하세요. 샘플의 파일 이동 링크는 제거하여 미리보기 안에서 존재하지 않는 파일을 열지 않도록 했습니다.

E006 사인함수와 삼차함수의 대소 관계

범위 수학 I · 수학 II + 미적분

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 1 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2), (3), (4)

발체 범위 원 (2)~(4) · 연결 물음은 공통편 C046

삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.

(나) $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$

연결 안내 | 공통편 C046 원 소문항 (1)에서 얻은 식 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$ 를 사용합니다. 이는 위 (가), (나)에서 결정되는 삼차함수입니다. 이 결과는 아래 문항의 연결 조건이며 새 판매 문항으로 중복 세지 않습니다.

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 가 성립함을 보이시오.

(3) $f'(c) = g'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재함을 보이시오.

(4) $0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립함을 보이시오.

원 소문항 (2), (3), (4)의 배점은 각각 8점, 16점, 10점입니다.

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

E006 사인함수와 삼차함수의 대소 관계

범위 수학 I · 수학 II + 미적분

출처 이화여자대학교 2026학년도 수시 논술(논술전형) · 자연계열 I 문제 1 (1)~(4) · 대학 공식 원문 대조 · 이번 권 수록: (2), (3), (4)

발체 범위 원 (2)~(4) · 연결 물음은 공통편 C046

증명 방법 평균값 정리 · 사잇값 정리 · 롤의 정리 · 도함수의 증가와 유일성

핵심 결론 (2)의 등호는 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 에서, (4)의 등호는 $x = 0, 1$ 에서 성립합니다. (3)의 c 는 $(0, 1)$ 에 정확히 하나 존재합니다.

풀이의 출발점

서로 다른 두 함수의 값을 비교할 때에는 차를 하나의 함수로 만듭니다. 도함수의 값이 같다는 조건도 $h = f - g$ 를 두면 $h'(c) = 0$ 으로 바뀝니다. 다만 $h'(c) = 0$ 인 점이 **존재한다**는 사실과 **하나뿐이라는** 사실은 따로 증명해야 합니다. 이 문항에서는 사잇값 정리 또는 롤의 정리로 존재를, $h'' > 0$ 에서 얻는 h' 의 증가로 유일성을 증명합니다.

(2) 사인 곡선과 두 끝점을 잇는 선분을 비교합니다

$k(x) = \sin x$ 라 하면 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $k''(x) = -\sin x < 0$ 입니다. 따라서 그래프는 위로 볼록이고, 끝점 $(0, 0)$ 과 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 을 잇는 선분의 방정식은 $y = \frac{2x}{\pi}$ 입니다. 이로부터 내점에서는 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ 이고 양 끝점에서는 등호가 성립합니다.

평균값 정리로 이 판단을 식으로 확인하기. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 를 임의로 고정하겠습니다. $\sin x$ 는 $[0, t], [t, \frac{\pi}{2}]$ 에서 각각 연속이고 각 열린구간에서 미분가능합니다. 평균값 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{\sin t}{t} = \cos u, \quad \frac{1 - \sin t}{\frac{\pi}{2} - t} = \cos v$$

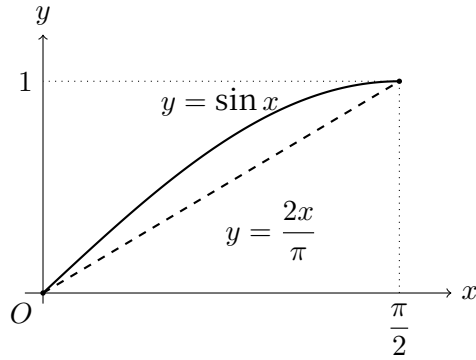
인 $u \in (0, t), v \in (t, \frac{\pi}{2})$ 가 존재합니다. $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $(\cos x)' = -\sin x < 0$ 이므로 코사인함수는 감소합니다. $u < v$ 이므로 $\cos u > \cos v$ 이고,

$$\frac{\sin t}{t} > \frac{1 - \sin t}{\frac{\pi}{2} - t}.$$

두 분모가 양수이므로 곱해도 부등호 방향이 바뀌지 않습니다. 따라서

$$\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t > t(1 - \sin t) \implies \frac{\pi}{2} \sin t > t \implies \sin t > \frac{2}{\pi}t.$$

$t = 0, \frac{\pi}{2}$ 는 이 분모를 이용할 수 없으므로 직접 대입하여 등호를 확인합니다. 이로써 닫힌구간 전체에서 요구한 부등식이 성립합니다.



두 끝점에서는 같고, 그 사이에서는 사인 곡선이 선분보다 위에 있습니다.

(3) 존재와 유일성을 각각 증명합니다

1단계 보조함수를 설정합니다.

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x - \sin \frac{\pi x}{2}$$

라 두면 목표식은 $h'(c) = 0$ 입니다. 미분하면

$$h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

다항함수와 코사인함수는 연속이므로 h' 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속입니다. 끝점의 값은

$$h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0, \quad h'(1) = \frac{1}{3} > 0.$$

$\pi > 3$ 이므로 첫 번째 값이 음수임도 분명합니다. 따라서 사잇값 정리에 의해 $h'(c) = 0$ 인 c 가 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재합니다. 사잇값 정리를 적용한 함수는 h 가 아니라 h' 입니다. 끝점 값이 모두 0이 아니므로 얻은 점은 반드시 내점입니다.

2단계 앞 소문항을 이제도함수에 사용합니다.

$$h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$0 < x < 1$ 이면 $0 < \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2}$ 입니다. (2)의 내점 부등식에 $t = \frac{\pi x}{2}$ 를 넣으면

$$\sin \frac{\pi x}{2} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi x}{2} = x.$$

따라서

$$h''(x) > \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)x > 0 \quad (0 < x < 1).$$

마지막 부등식에는 $x > 0$ 과 $\pi^2 > 8$ 을 사용했습니다.

3단계 증가가 왜 유일성을 주는지 설명합니다. 임의의 $0 \leq a < b \leq 1$ 에 대해 h' 는 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능합니다. 평균값 정리에 의해

$$h'(b) - h'(a) = h''(\xi)(b - a) > 0 \quad (\xi \in (a, b))$$

입니다. 그러므로 h' 는 $[0, 1]$ 에서 엄격히 증가합니다. 서로 다른 두 점에서 $h' = 0$ 일 수 없으므로 앞서 얻은 c 는 하나뿐입니다. $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ 에서 요구한 결론이 나옵니다.

존재만 보이는 다른 방법 롤의 정리. h 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $(0, 1)$ 에서 미분가능하며 $h(0) = h(1) = 0$ 입니다. 따라서 롤의 정리로 $h'(c) = 0$ 인 $c \in (0, 1)$ 의 존재를 곧바로 얻을 수 있습니다. 그러나 롤의 정리만으로는 하나뿐임이 나오지 않습니다. 위의 $h'' > 0$ 과 h' 의 증가 논증은 여전히 필요합니다. 공식 예시답안은 존재 단계에서 사잇값 정리를 사용합니다.

(4) 도함수의 부호와 끝점 값을 연결합니다

h' 는 증가하고 $h'(c) = 0$ 이므로 $x < c$ 에서 $h'(x) < 0$, $x > c$ 에서 $h'(x) > 0$ 입니다. 따라서 h 는 $[0, c]$ 에서 감소하고 $[c, 1]$ 에서 증가합니다.

x	0	$(0, c)$	c	$(c, 1)$	1
$h'(x)$	-	-	0	+	+
$h(x)$	0	$\searrow$	$h(c) < 0$	$\nearrow$	0

$0 \leq x \leq c$ 에서는 $h(x) \leq h(0) = 0$ 이고, $c \leq x \leq 1$ 에서는 $h(x) \leq h(1) = 0$ 입니다. 따라서 $h(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$ 입니다. 내점에서는 엄격한 감소·증가에 의해 $h(x) < 0$ 이며, 등호는 $x = 0, 1$ 에서만 성립합니다.

제출용 모범답안

(2) $k(x) = \sin x$ 는 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $k''(x) = -\sin x < 0$ 이므로 위로 볼록이다. 따라서 그 그래프는 두 끝점 $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 을 잇는 선분보다 내점에서 위에 있다. 그러므로 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)이고, 양 끝점에서는 등호가 성립하여 요구한 부등식을 얻는다.

(3) $h = f - g$ 라 하면 $h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - (\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2})$ 이다. h' 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0 < h'(1) = \frac{1}{3}$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $h'(c) = 0$ 인 $c \in (0, 1)$ 가 존재한다. (2)로부터 $0 < x < 1$ 에서 $\sin(\frac{\pi x}{2}) > x$ 이므로

$$h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2} > \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) x > 0.$$

따라서 h' 는 $[0, 1]$ 에서 증가하여 함숫값이 0인 점이 하나뿐이다. 그러므로 $f'(c) = g'(c)$ 인 c 는 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재한다.

(4) (3)에 의해 $h' < 0$ ($0 < x < c$), $h' > 0$ ($c < x < 1$)이므로 h 는 $[0, c]$ 에서 감소하고 $[c, 1]$ 에서 증가한다. $h(0) = h(1) = 0$ 이므로 $h(x) \leq 0$ ($0 \leq x \leq 1$)이다. 즉 $f(x) \leq g(x)$ 이다.

감점 점검과 다음 문제에 남길 판단

사잇값 정리의 대상 함수와 닫힌구간의 연속성을 적습니다. 존재와 유일성을 분리합니다. (2)의 변수를 $\frac{\pi x}{2}$ 로 바꿀 때 구간도 확인합니다. $h''(0) = 0$ 이라는 이유로 단조성 논증을 포기하지 않습니다. 평균값 정리의 중간점은 $(a, b) \subset (0, 1)$ 에 있으므로 내점의 $h'' > 0$ 으로 충분합니다. 전체 원논제의 공식 배점은 6·8·16·10점이며, 롤의 정리 대안에 대해 별도 배점이 공표된 것은 아닙니다.

E023 조건부확률의 방향을 바꾼 주장의 반박

범위 확률과 통계 · 독립

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 22-9 (원교재 PDF 155쪽) · 고려대 2008 수시(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

어느 제약회사에서 1만 정의 알약을 생산하였다. 그런데 1정의 알약이 모조 알약으로 바뀌는 일이 발생하였다. 알약이 진품인가 모조품인가를 구별하는 기술을 이용할 경우 진품 알약은 90%의 확률로 진품으로 판정되고 10%의 확률로 모조품으로 판정된다. 그리고 모조품 알약은 90%의 확률로 모조품으로 판정되고 10%의 확률로 진품으로 판정된다.

임의의 알약 1정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔을 때, 갑은 그 알약이 모조품일 확률이 90%라고 주장하였다. 갑의 주장에서 올바르게 서술되지 않은 부분이 있으면 바르게 고치고, 그 과정을 설명하시오.

원교재 문제 22-9의 수치·조건·요구를 보존했다. 원문의 단순 오타 ‘확류률’은 ‘확률로’로 바로잡았다. 교재에는 고려대 2008 수시로 표기되어 있으나 이번 대조는 BlueMath 원교재까지이며 대학 원문을 별도로 확인한 것은 아니다.

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

E023 조건부확률의 방향을 바꾼 주장의 반박

범위 확률과 통계 · 독립

출처 『Blue Math 수리논술 개념총정리』 문제 22-9 (원교재 PDF 155쪽) · 고려대 2008 수시(교재 표기); 대학 원문 별도 미대조

증명 방법 조건부확률의 정의 · 경우 분할 · 반박

핵심 결론 값은 두 조건부확률의 조건과 결론을 바꾸어 생각했습니다. 모조품 판정을 받은 알약이 실제 모조품일 확률은 $\frac{1}{1112}$ 이며, 약 0.0899%입니다.

조건을 읽고 시작하는 이유

문제의 90%는 ‘실제로 모조품인 알약을 검사했을 때 모조품 판정이 나올 확률’입니다. 구하는 것은 순서가 반대인 ‘모조품 판정이 나왔다는 조건 아래 실제 모조품일 확률’입니다. 이 두 값은 일반적으로 같지 않습니다. 전체 알약에서 모조품이 차지하는 비율이 매우 작다는 조건을 함께 사용해야 합니다.

사건을

$$A = \{\text{실제 모조품을 뽑음}\}, \quad B = \{\text{검사 결과 모조품 판정을 받음}\}$$

으로 정의하겠습니다. 그러면 주어진 확률은

$$P(A) = \frac{1}{10000}, \quad P(\bar{A}) = \frac{9999}{10000}, \quad P(B|A) = \frac{9}{10}, \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{10}$$

이고 구하는 값은 $P(A|B)$ 입니다.

1단계 모조품 판정을 만드는 두 경로를 구별합니다

모조품 판정은 실제 모조품을 맞게 판정한 경우에도, 실제 진품을 잘못 판정한 경우에도 나옵니다. 두 경우는 동시에 일어날 수 없고 둘을 합치면 사건 B 가 됩니다. 조건부확률의 정의에 의해

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{100000}, \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{9999}{10000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9999}{100000}. \end{aligned}$$

따라서

$$P(B) = \frac{9}{100000} + \frac{9999}{100000} = \frac{10008}{100000} > 0.$$

실제 진품의 수가 훨씬 많으므로, 진품의 오판 확률이 10%여도 모조품 판정을 받은 전체에서 큰 비중을 차지합니다.

	실제 모조품 A	실제 진품 $\bar{A}$	합계
모조품 판정 B	$\frac{9}{100000}$	$\frac{9999}{100000}$	$\frac{10008}{100000}$
진품 판정 $\bar{B}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{89991}{100000}$	$\frac{89992}{100000}$
합계	$\frac{1}{10000}$	$\frac{9999}{10000}$	1

표의 값은 각각 두 사건이 동시에 일어날 확률입니다. 실제 알약의 개수나 조건부확률을 직접 적은 표가 아닙니다.

2단계 판정을 받은 경우만 남겨 비율을 다시 계산합니다

조건부확률 $P(A | B)$ 에서 분모는 전체 표본공간의 확률 1이 아니라 조건 사건 B 의 확률입니다. 따라서

$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{9}{100000}}{\frac{10008}{100000}} \\ &= \frac{9}{10008} = \frac{1}{1112}. \end{aligned}$$

이를 백분율로 나타내면 $\frac{100}{1112}\% \approx 0.0899\%$ 입니다. 소수로 쓴 확률 약 0.000899와 백분율 약 0.0899%를 혼동하지 않아야 합니다.

갑의 주장 중 무엇을 고쳐야 하는가

$P(B | A) = 90\%$ 라는 사실 자체는 문제의 조건으로 옳습니다. 잘못된 부분은 이를 근거 없이 $P(A | B) = 90\%$ 라고 바꾼 것입니다. 조건부확률은 어느 사건을 조건으로 고정하느냐에 따라 분모가 달라집니다. 두 사건의 교집합은 같지만, 앞 식의 분모는 $P(A)$ 이고 뒤 식의 분모는 $P(B)$ 이므로 일반적으로 두 확률은 같지 않습니다.

이 계산에는 두 사건이 독립이라는 가정을 쓰지 않습니다. 오히려 실제 알약의 상태에 따라 판정 확률이 90%와 10%로 달라진다는 조건을 그대로 사용합니다. 특정 검사의 실제 성능을 평가하는 자료가 아니라, 원교재에 주어진 가정 아래 조건부확률을 계산하는 수학 문항입니다.

제출용 모범답안

실제 모조품인 사건을 A , 모조품 판정을 받은 사건을 B 라 하자. 주어진 90%는 $P(B | A)$ 이며 구하는 값은 $P(A | B)$ 이므로 둘을 같다고 할 수 없다.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{100000}, \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{9999}{10000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9999}{100000}.$$

두 경우는 서로 겹치지 않고 합이 B 이므로 $P(B) = \frac{10008}{100000}$ 이다. 따라서

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{10008} = \frac{1}{1112}.$$

그러므로 갑의 조건부확률 방향이 잘못되었고, 올바른 확률은 $\frac{1}{1112}$ 이다.

감점 점검

두 사건을 먼저 말로 정의합니다. 모조품 판정이 나온 두 경우를 모두 분모에 넣습니다. ‘진품일 확률’과 ‘진품을 모조품으로 오판할 확률’을 구별하고 곱합니다. 조건부확률의 정의만으로 유도할 수 있으므로 이름만 붙인 별도 공식을 설명 없이 인용할 필요가 없습니다.

E025 평면벡터의 조건으로 내적의 양수성 증명

범위 수학Ⅱ + 기하

출처 연세대학교 서울캠퍼스 2025학년도 · 수시모집 논술전형(추가시험) 자연계열 수학 · 3-3 · 대학 공식 원문
대조

f, g 는 실수 전체에서 미분가능하다. 각 실수 t 에 대하여

$$P = (f(t), g(t)), \quad P' = (f'(t), g'(t))$$

로 정하고, 원점을 O 라 한다. 세 점 Q, R, S 와 실수 a, b 에는 다음 공통 조건이 주어진다.

$$(I) \quad \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} < 0, \quad a |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}|, \quad a > 1,$$

$$(II) \quad \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0, \quad \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0, \quad |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|,$$

$$(III) \quad \overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PS}, \quad \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0, \quad b |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PS}|, \quad b > 0.$$

원문에서 이 조건들은 문제 3-1, 3-2, 3-3에 공통으로 제시된다.

추가로 $a > 2$ 이고, 모든 실수 t 에서

$$f(t)g(t) = 1, \quad f(t) > a, \quad f'(t) > 0$$

이다. 이때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$ 이 모든 실수 t 에 대해 성립함을 증명하여라. [원문 3-3, 15점]

조건을 확인하고 논증을 작성하세요.

E025 평면벡터의 조건으로 내적의 양수성 증명

범위 수학Ⅱ + 기하

출처 연세대학교 서울캠퍼스 2025학년도 · 수시모집 논술전형(추가시험) 자연계열 수학 · 3-3 · 대학 공식 원문 대조

증명 방법 곱의 미분법 · 벡터의 성분 · 내적과 부호

상세해설

핵심 생각과 풀이 순서. 목표는 $\vec{OP} \cdot \vec{OR}$ 의 부호입니다. $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$ 이므로, 먼저 조건 (I), (II)로 $\vec{PR}$ 을 결정하겠습니다. $f(t)g(t) = 1$ 은 두 좌표를 하나의 변수로 나타내게 하고, 미분한 식은 $\vec{PR}$ 의 방향을 결정하는 데 쓰입니다.

1. 임의의 실수 t 에서 함수값을 기호로 나타냅니다. 어떤 특정 시각의 예가 아니라 모든 실수 t 에 대한 명제를 증명해야 합니다. 따라서 t 를 임의로 하나 정한 뒤

$$x = f(t), \quad u = f'(t)$$

라고 놓겠습니다. 문제의 조건에서 $x > a > 2, u > 0$ 입니다. 특히 $x \neq 0$ 입니다. 두 함수가 미분가능하므로 $f(t)g(t) = 1$ 에 곱의 미분법을 적용하면

$$f'(t)g(t) + f(t)g'(t) = 0$$

입니다. $g(t) = \frac{1}{f(t)}$ 를 대입한 뒤 $f(t) \neq 0$ 으로 나누면

$$g(t) = \frac{1}{f(t)}, \quad g'(t) = -\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}$$

입니다. 따라서

$$\vec{OP} = \left(x, \frac{1}{x}\right), \quad \vec{OP}' = \left(u, -\frac{u}{x^2}\right).$$

x, u 는 선택한 t 에서의 함수값과 미분계수이며, x 에 대한 미분을 새로 수행하는 것이 아닙니다.

2. 조건 (I)의 평행, 내적, 길이를 차례로 사용합니다. $\vec{OQ}$ 가 $\vec{OP}$ 와 평행하므로 그 차인 $\vec{PQ}$ 도 $\vec{OP}$ 와 평행합니다. 따라서 어떤 실수 λ 에 대해

$$\vec{PQ} = \lambda \vec{OP}$$

로 쓸 수 있습니다. $\vec{OP} \neq \vec{0}$ 이고

$$\vec{OP} \cdot \vec{PQ} = \lambda |\vec{OP}|^2 < 0$$

이므로 $\lambda < 0$ 입니다. 길이 조건에서 $|\lambda| = a$ 이고 $a > 0$ 이므로 $\lambda = -a$ 입니다. 즉,

$$\vec{PQ} = -a \vec{OP} = \left(-ax, -\frac{a}{x}\right).$$

평행 조건만으로 방향까지 정할 수 없고, 내적의 음수 조건이 반대 방향을 정해 줍니다.

3. 조건 (II)로 $\vec{PR}$ 의 성분을 결정합니다. $\vec{PR} = (r, s)$ 라고 하겠습니다. 먼저 수직 조건을 성분으로 쓰면

$$0 = \vec{PR} \cdot \vec{OP}' = ur - \frac{u}{x^2}s.$$

$u > 0$ 이므로 u 로 나누어 $r - \frac{s}{x^2} = 0$, 즉 $s = x^2 r$ 을 얻습니다. 여기서 $f'(t) > 0$ 은 특히 $u \neq 0$ 을 보장하여 이 나눗셈을 허용합니다.

다음으로 $\overrightarrow{PR}$ 과 $\overrightarrow{PQ}$ 의 내적이 양수라는 조건은

$$\begin{aligned} 0 &< \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= -axr - \frac{a}{x}s \\ &= -axr - \frac{a}{x} \cdot x^2r = -2axr \end{aligned}$$

입니다. a, x 가 양수이므로 $-2ax$ 는 음수입니다. 따라서 $r < 0$ 이어야 합니다. 음수로 나눌 때 부등호가 바뀌는 점을 확인하세요.

마지막으로 길이가 같다는 조건을 제공합니다. 길이는 모두 음이 아닌 값이므로 제공한 식을 사용해도 원래의 길이 조건과 동치입니다.

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= a^2x^2 + \frac{a^2}{x^2}, \\ r^2(1 + x^4) &= \frac{a^2(1 + x^4)}{x^2}. \end{aligned}$$

$1 + x^4 > 0$ 이므로 이 값으로 나누면 $r^2 = \frac{a^2}{x^2}$ 입니다. 길이만으로는 $r = \pm \frac{a}{x}$ 두 후보가 나오지만, 앞에서 $r < 0$ 을 확인했고 $a, x > 0$ 이므로

$$r = -\frac{a}{x}, \quad s = x^2r = -ax.$$

따라서 주어진 세 조건을 동시에 만족하는 벡터는

$$\overrightarrow{PR} = \left(-\frac{a}{x}, -ax\right)$$

로 정해집니다.

4. 목표 내적을 계산한 뒤 어느 조건으로 양수가 되는지 확인합니다. 벡터의 덧셈에 의해

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \left(x - \frac{a}{x}, \frac{1}{x} - ax\right).$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} &= x \left(x - \frac{a}{x}\right) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - ax\right) \\ &= x^2 - a + \frac{1}{x^2} - a \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a \\ &> x^2 - 2a \\ &> a^2 - 2a = a(a - 2) > 0. \end{aligned}$$

첫 부등식은 $\frac{1}{x^2} > 0$ 에서 나옵니다. 두 번째는 $x > a > 0$ 이므로 $x^2 > a^2$ 라는 사실을 사용합니다. 마지막은 $a > 2$ 에서 나옵니다. 세 조건을 연결했으므로 등호가 성립하는 경우는 없습니다.

처음 정한 t 는 임의의 실수였고 모든 t 에서 $x > a, u > 0$ 이 주어져 있으므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$$

은 모든 실수 t 에서 성립합니다.

원조건 검산과 주의. 구한 벡터를 다시 넣으면

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a}{x}, -ax\right) \cdot \left(u, -\frac{u}{x^2}\right) &= 0, \\ \left(-\frac{a}{x}, -ax\right) \cdot \left(-ax, -\frac{a}{x}\right) &= 2a^2 > 0, \\ \left| \left(-\frac{a}{x}, -ax\right) \right|^2 &= a^2x^2 + \frac{a^2}{x^2} = |\overrightarrow{PQ}|^2. \end{aligned}$$

따라서 방향의 부호와 길이가 모두 조건 (II)에 맞습니다. 공통 조건 (III)은 원문에 보존되어 있지만 이 소문항의 목표에는 S가 나타나지 않으므로 계산에 사용할 필요가 없습니다. 또한 증명에는 원문에서 주어진 $a > 2$ 를 그대로 사용하며, 그 조건이 가능한 최선의 범위라고 주장하는 것은 아닙니다.

제출용 모범답안

곱의 미분법으로 $f'g + fg' = 0$ 이고, $f > a > 2$ 이므로 $g = \frac{1}{f}$, $g' = -\frac{f'}{f^2}$ 이다. 임의의 실수 t 에 대해 $x = f(t) > a > 2$, $u = f'(t) > 0$ 라 놓으면

$$\overrightarrow{OP} = \left(x, \frac{1}{x}\right), \quad \overrightarrow{OP'} = \left(u, -\frac{u}{x^2}\right).$$

조건 (I)에서 $\overrightarrow{PQ} = -a\overrightarrow{OP}$ 입니다. $\overrightarrow{PR} = (r, s)$ 라 놓으면 조건 (II)의 수직 조건에서 $s = x^2r$, 내적의 양수 조건에서 $-2axr > 0$, 즉 $r < 0$ 입니다. 길이 조건에서

$$r^2(1 + x^4) = \frac{a^2(1 + x^4)}{x^2}$$

이므로 $r = -\frac{a}{x}$, $s = -ax$ 입니다. 따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} &= \left(x, \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{a}{x}, \frac{1}{x} - ax\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a \\ &> x^2 - 2a > a^2 - 2a = a(a - 2) > 0. \end{aligned}$$

t 가 임의의 실수이므로 모든 실수 t 에 대해 성립합니다.