
물2 역학 실전개념

역학 단원의 핵심

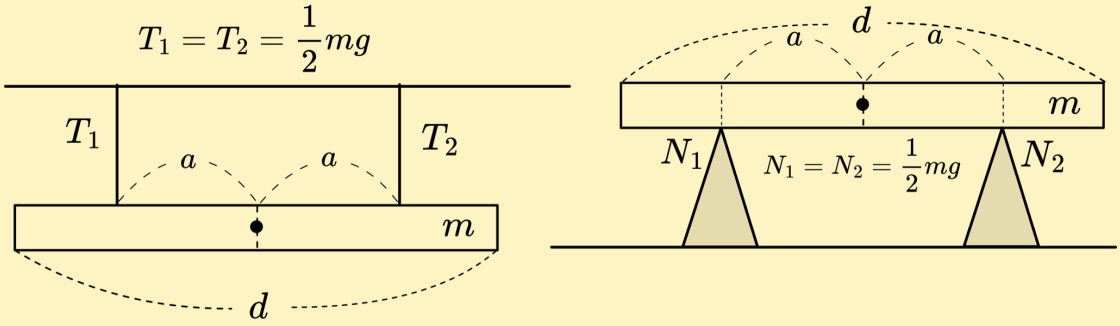
1. 상황 똑바로 해석, 발문 똑바로 정확히 읽기 (동시 발사조건을 놓치거나, 반대로 동시발사가 아닌데 동시발사라고 나도모르게 적용하고 잘못 푸는 대참사 주의)

2. 시험장이든 실모 풀때든 고난도 3문제를 제외하고는 반드시 역학문항들에 대해
1분 30초 이상 쓰는일이 없도록 완벽한 기계적 풀이가 갖춰져야 함
처음부터 이 문제에 대한 완벽한 풀이를 설계하고 프로그래밍 된듯 풀라는것이 아니라
적어도 이 단계에서 뭘 해야될지 고민을 10초이상 하는 일이 없을 경지까지 올라야 함

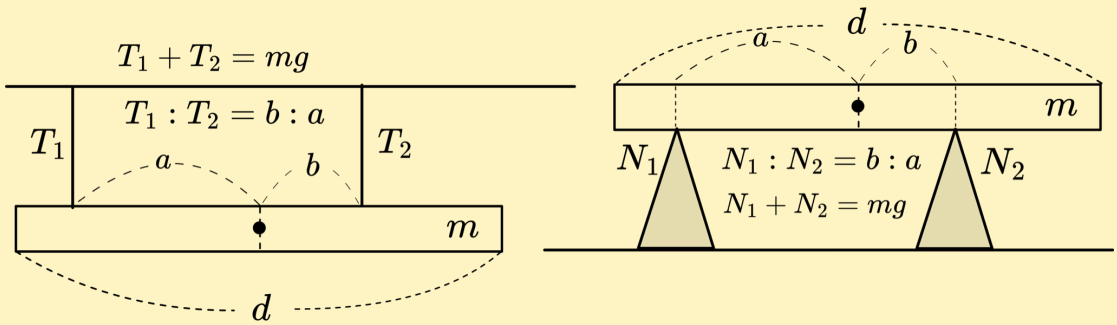
3. 2를 곱하거나 2를 나눠야 하는 상황에서 빼먹고 계산하는 실수 주의

4. 벡터 풀이가 막힐 때는 정석 직교좌표분해, 등가속도 기본 변위공식을 떠올려보면
오히려 그게 더 쉬운 길임을
깨닫는 순간이 있다. 벡터는 모든 역학문제의 치트키가 아니므로, 벡터풀이가 막히면 당황하지 말고 기본적인 직교좌표분해 풀이 및 교과서공식을 활용해서 풀이흐름이 끊기지 않도록 하자.

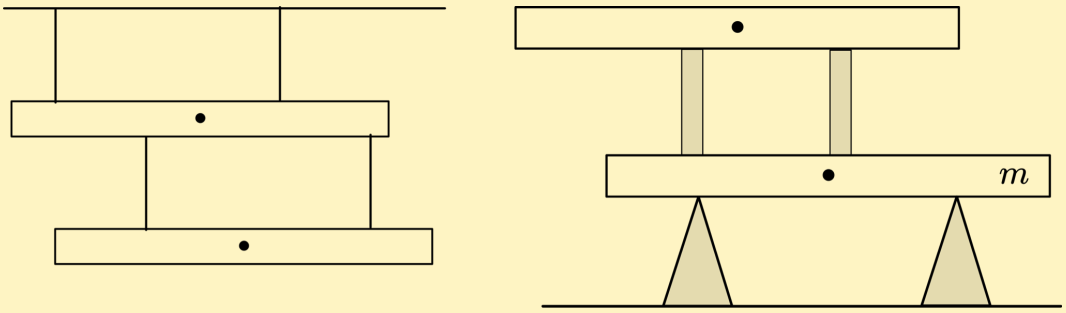
5. 발문 똑바로 꼼꼼히 읽자. 특히 대표 물리량(시간, 속도, 변위, 가속도, 질량)및
보조 물리량(접선 삼각비, 경사각 삼각비, 힘, 에너지), 동시발사, 충돌(=‘동시’충돌)
그리고 상대속도의 간접조건제시, 축회귀의 속도대칭성 등



위와 같이 실이나 받침대가 계의 무게중심으로부터 떨어진 거리가 같다면 두 힘의 크기는 같다.
이는 필요충분조건으로, 만약 두 힘의 크기가 같다면 작용점이 무게중심으로부터 떨어진 거리가 같다.



위와 같이 계를 유일하게 지탱하는 두 힘의 작용점이 계의 무게중심으로부터 떨어진 거리비가 a:b이라면
두 힘의 합은 계의 무게와 같으며 두 힘의 비는 b:a 가 된다.
이때 만약 계를 지탱하는 유일한 두 힘의 작용점이 계의 무게중심으로부터 a:b의 비로 떨어져있다면
두 힘의 비는 b:a가 된다.



이런 다층구조는 모든 상황을 항상 돌파하는 일관된 해석법은 없지만 다음을 참조하면 좋다.

1) 2층 실 구조는 최상위 실이 계 전체를 지탱한다. 즉 위와 같이 계 전체 무게를 최상위 실 두개가 분담한다.
이때 주의할 점은 계의 질량중심과 최상위 막대의 무게중심은 일반적으로 위치가 다르므로,
최상위 막대에서 실이 질량중심 기준 대칭으로 연결되어 있다 하더라도 1:1 내분은 아닐 가능성이 높다.
그러나 위와 같이 최하단 막대를 지탱하는 실은 일반적인 단일 실유형과 동일하게 무게가 배분되고
최하단 막대의 무게중심으로부터의 거리비의 역수비만큼 무게를 분담한다고 해석하면 된다.
물론 최하단 막대위에 물체가 있거나 밑에 추가 달려있으면 그걸 포함한 질량중심을 기준으로 해석하자.

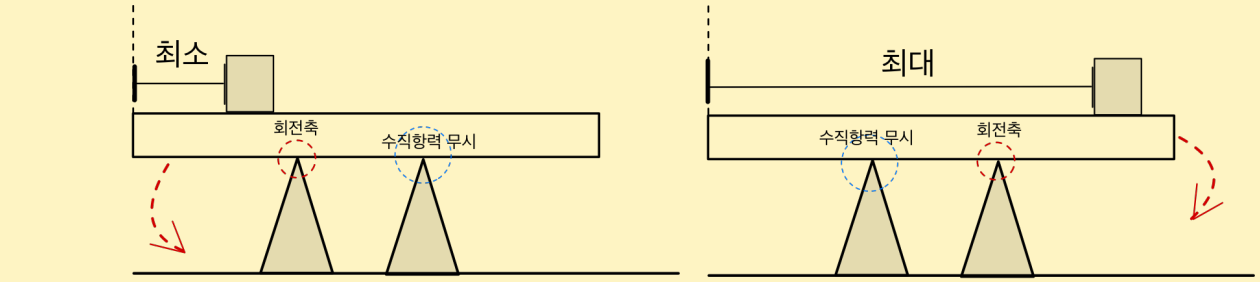
2) 2층 이상 받침대 유형은 받침대가 계 전체 무게를 분담한다. 가끔 사악한 유형은 실이 붙어있을수도 있다.
이때 실 유형과는 무게분담을 반대로 해석하면 된다. 받침대가 최하단 막대 무게중심 기준 대칭이라 해도
수직항력이 1:1 배분이 아닐 가능성이 매우 높으며 계 전체의 질량중심을 기준으로 대칭이어야 1:1 비가 된다.
또한 최상위 막대를 지탱하는 수직막대는 최상위 막대의 무게중심 기준 거리비의 역수비만큼 무게를 분담한다.

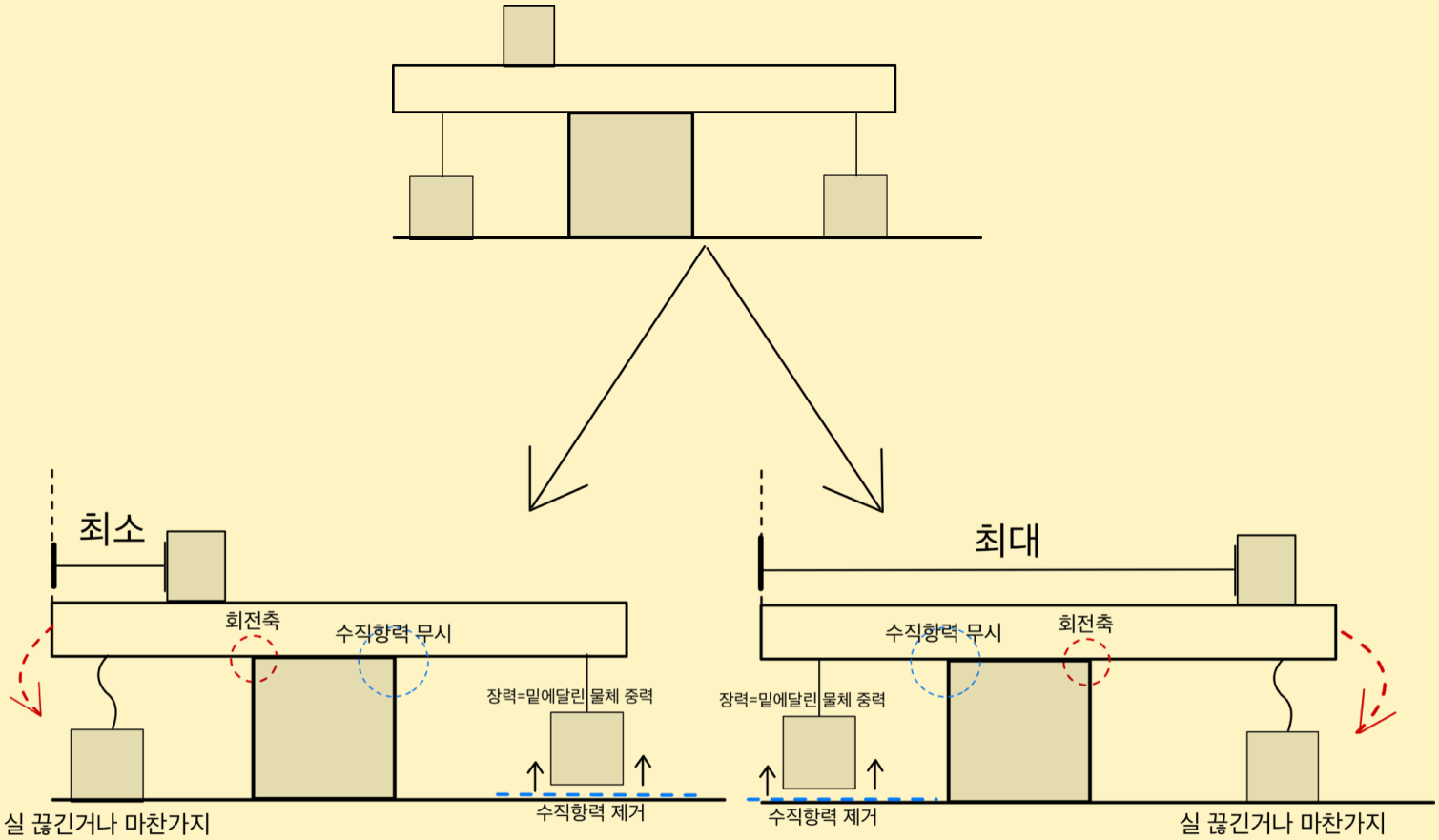
[2] 어떤 구조물이 평형을 유지하기 위한 특정 물리량의 한계 양단값을 묻는 유형
보통 문제 발문에 '(물리량 문자)의 최댓값/최솟값은?' 하고 물어본다
또는 23수능처럼 특정 물리량의 최대/최소를 먼저 알려주고 나서 다른 물리량을 물어보는 경우도 있다.
참고로 평형 해제유형은 매우 높은확률로 돌림힘 평형만 활용하고, 힘의 평형은 잘 안쓰인다.

1) 평형이 깨지면 어디로 회전할지 회전 방향과 회전축 정확히 찾아야 함

2) 회전을 막는 수직항력(회전 반대방향으로 떠받치는 힘이며 돌림힘으로 작용)과
회전 즉시 없어지는 수직항력(회전하자마자 접촉이 풀리는 힘, 무시가능) 구분

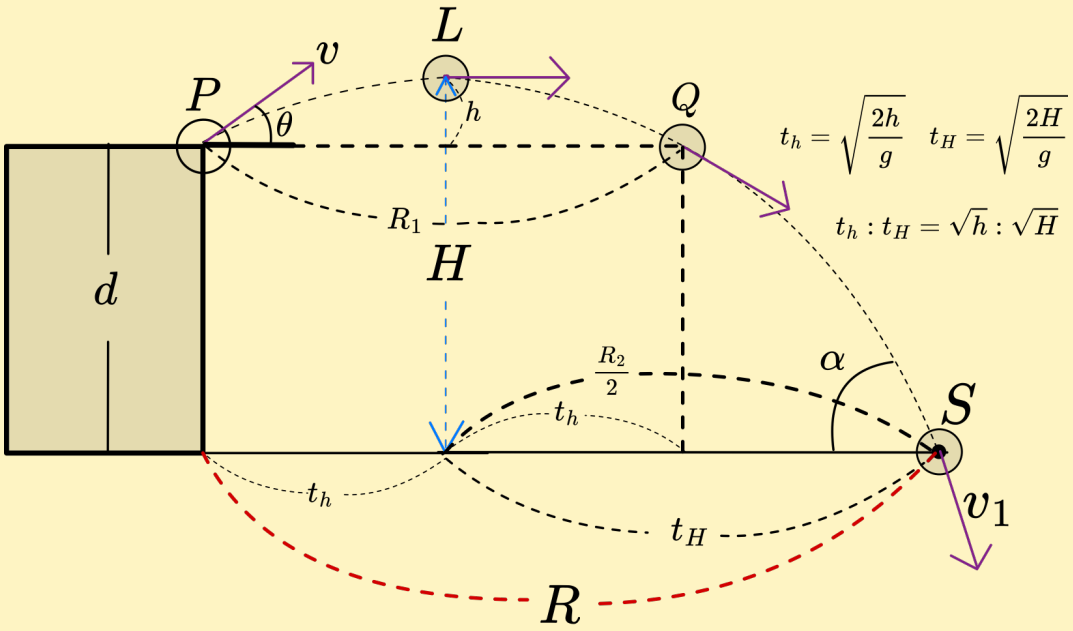
3) 변화간격 공식으로 안 풀리거나 계산이 더 복잡해지는 유형이 상당히 많기때문에,
최대인 상황과 최소인 상황을 기준으로 각각의 상황을 먼저 세팅하고 돌림힘 평형을 이용해
방정식 여러개 연립해서 푸는 노가다유형이 많다. 이때 각 상황별로 회전축이 달라질수 있으니 주의





공중/건물에서 발사된 포물선 운동의 심화적 해석과 잡공식

P에서 Q까지를 포물선 운동 A이라 하고 L에서 S까지를 포물선 운동 B 이라 하면
A는 B운동의 일부가 된다.
(P점은 A운동의 발사점이 되면서 B운동의 체공 중 어느 한 시점이 된다)
또한 두 운동은 최고점 L을 공유한다.



[상수 $k = d + R\tan\theta$ (치환)]

$$R_1 = 4h\cot\theta = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

$$\frac{R_2}{2} = \frac{R_1}{2}\cdot\frac{t_H}{t_h} = R_1\sqrt{\frac{H}{h}}$$ (높이비의 루트가 시간비이고 수평거리는 시간에 비례하므로)

이 밑은 필요에 따라 외워도 되고 안외워도 됨..(몇몇 공식은 매우 복잡하므로 스스로 해보거나 AI에게 부탁하면 바로 나오는 점을 이용해주십시오.)

$$R = 2h\cot\theta\left(1+\sqrt{\frac{H}{h}}\right) = \frac{v}{2}\left(\cos\theta\sqrt{\frac{2H}{g}} + v\sin 2\theta\right)$$

$$h = \frac{(k-d)^2}{4k}\left(= \frac{(v\sin\theta)^2}{2g}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{g\left\{2H + \frac{R^2}{2k}\right\}}$$

(발사각, d와 R을 알 때)

$$H = \frac{(R\tan\alpha)^2}{4(R\tan\alpha - d)}$$

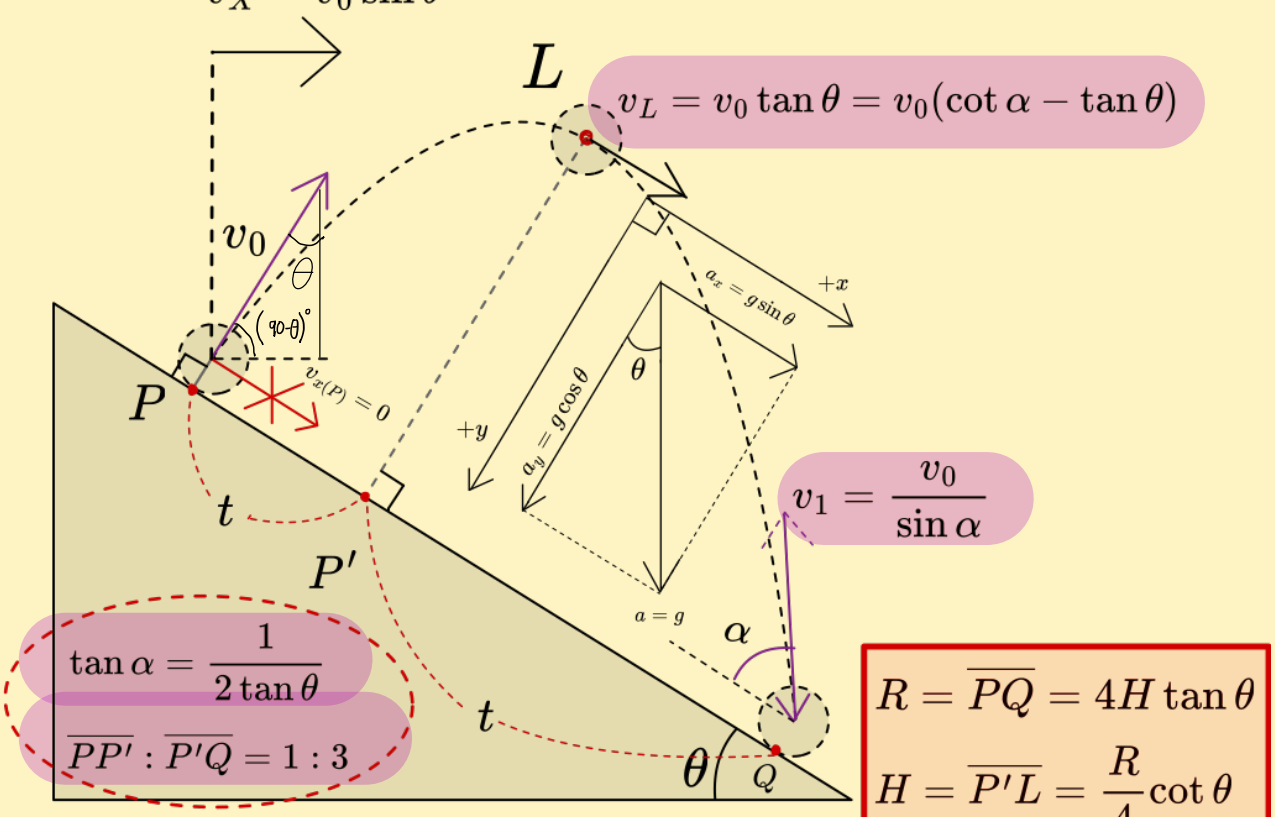
지면의 입/발사각
d, R을 알 때

[빗면 포물선 투사에서 특수 축 변환 해석]

(발사점 혹은 착지점의 운동방향 각도가 빗면과 수직하다는 조건 필요)

빗면이 아닌 **지면에 평행**한 방향의 속력

$$v_X = v_0 \sin\theta$$



$$R = \overline{PQ} = 4H\tan\theta$$

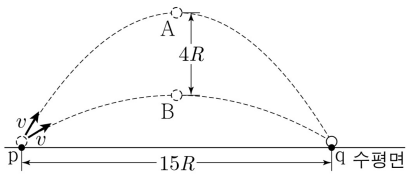
$$H = \overline{P'L} = \frac{R}{4}\cot\theta$$

새로운 축의 x 방향으로 등속도 운동 성립안됨 (등가속도)

극점 L이 새로운 좌표축에서의 포물선 최고점 역할을 함

그냥 포물선과 탄/코탄 여부 다르니 주의하십시오.

20. 그림과 같이 수평면상의 점 p에서 물체 A, B를 속력 v로 던졌더니 A, B가 각각 포물선 운동을 하여 수평면상의 점 q에 도달하였다. A, B의 최고점 높이의 차는 $4R$이고, p와 q 사이의 거리는 $15R$이다. A, B가 p에서 q까지 가는 데 걸린 시간은 각각 t_A, t_B이다.



$\frac{t_A}{t_B}$는? (단, 물체는 동일 연직면상에서 운동하고, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

같은 속력으로 포물선 발사한 두 물체의 수평 이동거리가 같을경우
발사 각도는 서로 여각 관계임

최소 거리 유형

1. 두 물체가 최소 거리가 되는 시점에서는 상대속도 벡터와 위치(선분)벡터가 서로 수직이 됨 $d_{min} \perp v_r$
이때 주의할 점은 상대속도벡터는 그 크기와 방향이 항상 일정할 것을 전제로 하지만 위치벡터(선분)은
최소일 시점과 초기 시점이 서로 방향과 크기 모두 자명하게 다름에 주의.

2. 초기 상대속도 벡터와 초기(발사)시점의 위치벡터가 이루는 각도 θ 의 사인값은,
외적의 크기공식 2개를 통해 구할 수 있음

이때 외적의 크기공식은
초기 상대속도 벡터의 크기(빗변값)와 초기 거리값에 $\sin\theta$ 를 곱한 값
즉

$$|v_r| d_0 \sin\theta$$

임.

이때 상대속도벡터와 초기 위치벡터를, 방향에 따른 부호설정에 주의하여 직교좌표 성분화하면

$$s_r\ (d_0) = (x_s, y_s)$$

$$v_r = (x_v, y_v)$$

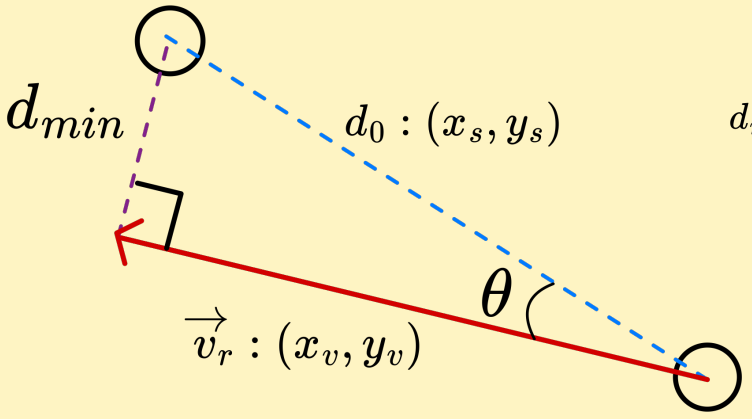
이고, 사선공식을 통해 외적을 구하면 (단, 아래의 ×기호는 곱셈이 아니라 외적 기호다.)

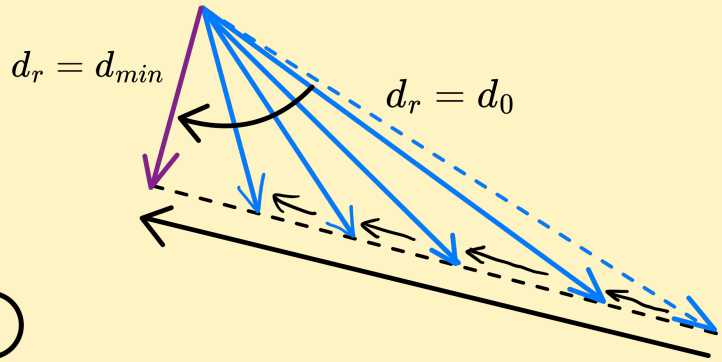
$$s_r \times v_r = |x_s y_v - x_v y_s|$$

그리고 이 값은 위의 공식과 같다.
따라서, 상대위치(거리) 함수의 최솟값은, 다음과 같이 구한다.

$$d_{min} = \underbrace{|d_0 \sin\theta|}_{\text{(쉬운 문제는 이걸 써도 됨)}} = d_0 \cdot \frac{|x_s y_v - x_v y_s|}{|v_r d_0|} = \frac{|x_s y_v - x_v y_s|}{|v_r|}$$

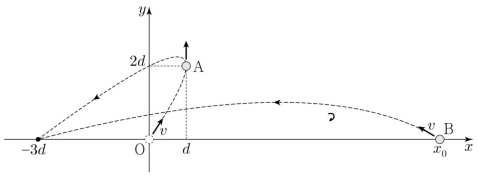
$$d_{min} = \frac{|x_s y_v - x_v y_s|}{|v_r|} \quad \text{(크로스곱 차/상대속도)}$$





2차원 xy 가속필드 유형 해석

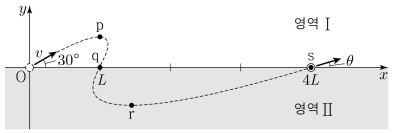
20. 그림과 같이 xy평면에서 물체 A와 B가 같은 가속도로 등가속도 운동을 한다. 원점 O를 v의 속력으로 지난 A가 $(d,\ 2d)$인 점을 $+y$방향으로 지나는 순간, B가 $(x_0,\ 0)$인 점에서 v의 속력으로 발사된다. A, B는 y축을 지나 $(-3d,\ 0)$인 점에서 만난다.



x_0은? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{13}{2}d$ ② $7d$ ③ $\frac{15}{2}d$ ④ $8d$ ⑤ $\frac{17}{2}d$

17. 그림과 같이 xy평면의 원점 O에서 물체를 x축과 $30°$의 각을 이루며 속력 v로 발사하였더니, 물체가 점 p, q, r를 지나, x축과 θ의 각을 이루며 점 s를 지난다. 물체는 xy평면상의 영역 Ⅰ, Ⅱ에서 가속도가 서로 다른 등가속도 운동을 한다. p와 r는 각각 Ⅰ, Ⅱ에서 x축과 물체 사이의 거리가 최대인 점이고, q와 s는 각각 $x=L$, $x=4L$인 x축상의 점이다. p와 y축 사이의 거리는 L이고, $\tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}$이다.



r와 x축 사이의 거리는? (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① $\frac{3\sqrt{3}}{10}L$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{20}L$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}L$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{20}L$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}L$

1. 이 유형 해석의 결정적 단서는 극점 과 대칭점 에서 시작된다.
극점이란, 위 20번 문제의 A 현재 위치나, 17번 문제 p 지점 등, 특정 방향 속도가 0이 되는 시점(지점 좌표)
대칭점이란, 20번 문제 B의 x_0 과 -3d, A의 원점과 (0,2d) 지점처럼,
특정 방향 속도가 절댓값 같고 방향 정반대 되는 시점(지점 좌표).

2. 물체의 특정 경유좌표는 시점 정보까지 모두 담고있는 것으로 간주해야 한다. 당연하지만, 매우 중요하다.

3. 극점에서는 그 양방향 시간 방향으로 리제로운동(초기 속도가 0이어서 변위가 오직 가속도와 시간 제곱에만 비례)
하기 때문에, 가속도가 일정할 때 변위비에 의한 시간(제곱비) 조건을, 시간비를 알고있다면 가속도 비를 알아낼 수 있다.

4. 대칭점 자체를 알아내는 것도 중요하다. 가속도가 일정한 영역에서 운동해서 특정 축 기준으로 회귀운동을 했다면
그 축방향 변위가 0이므로 평균 속도가 0이 되기 때문에 당연히 절댓값이 같고 방향이 반대인 속도조건을 뽑을 수 있다.

5. 문자 설정을 두려워하면 안된다. 적어도 3점짜리 유형은 반드시 특정 지점에서의 속도성분을 문자로 둘 수 있어야된다.
가속도성분은 주로 x y, 속도성분은 알파베타 로 통일하는 것을 추천한다.

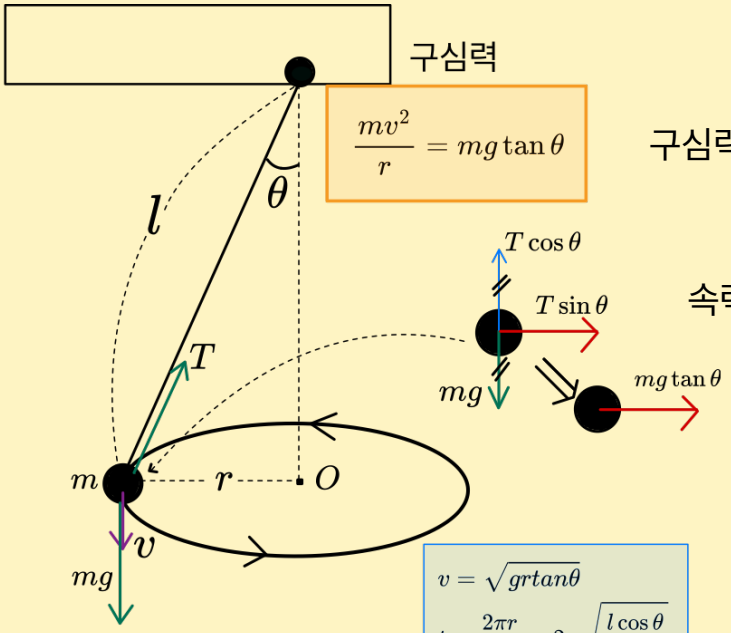
6. 이 유형은 xy축 모두 가속도가 작용하므로, 2as 공식을 쓸 경우 가속도, 변위, 속도제곱 모두 특정 축 성분만 적용해야 한다. 예를 들어 x축방향 2as 공식을 쓸 경우 a는 x방향 가속도, s는 x축방향 변위, 속도는 x방향 속도성분.
마찬가지로 변위벡터, 가속도 끄기도 신중하게 활용해야 한다. (대부분의 xy 가속필드 유형은 가속도 끄기 풀이가 현장에서 해석하기 매우 발상적이거나 불리하게 나온다)

7. 두 물체가 가속도가 같은 영역에서 운동한다면 상대가속도가 0이므로, 가끔 상대속도 조건을 활용할 수도 있다.
단, 상대속도를 적용하는게 유리한 게 맞는지 잠시 생각을 먼저 하고 풀도록 하자.

8. 아주 가끔 나오는 상황으로, '등가속 직선운동' 하는 상황은 가속도 방향과 초기 발사방향이 같음을 동치조건으로 뽑아낼 수 있다.

원뿔 진자

실의 길이가 아닌 코사인값(높이)에 주기가 비례함



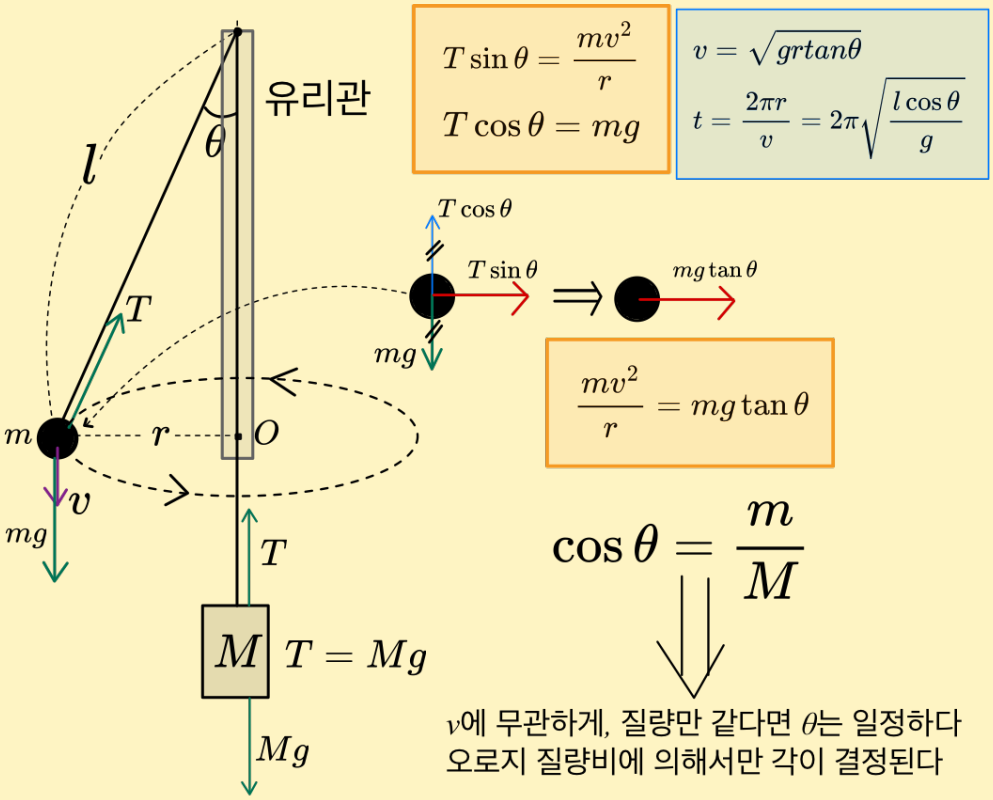
구심력 $F = mg\tan\theta$

속력 $v = \sqrt{gr\tan\theta}$

$E_k = \frac{r}{2}mg\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$ 각도는 반지름과 속력에 의해서 결정됨

주기는 실의 길이가 아닌 수직 높이 $l\cos\theta$ 의 제곱근에 비례한다.
따라서 실 길이가 달라도 수직높이가 같으면 주기는 같다.
또한 각이 같고 실 길이만 바뀌면 바뀐 비율의 루트배만큼 바뀐다.



$\cos\theta = \frac{m}{M}$

v에 무관하게, 질량만 같다면 θ는 일정하다
오로지 질량비에 의해서만 각이 결정된다

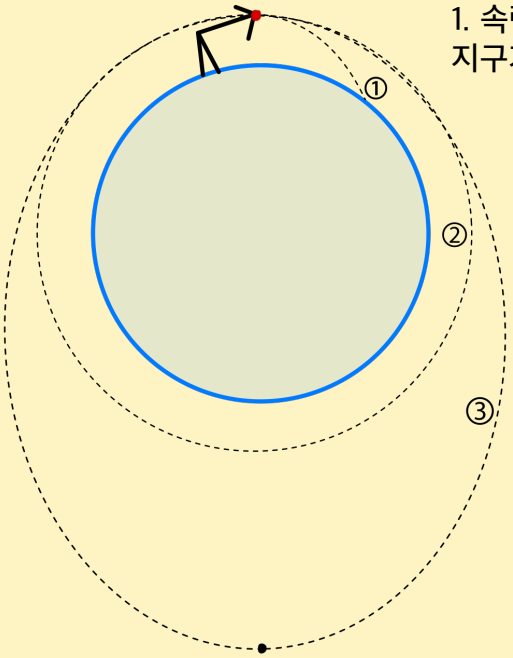
$E_k = \frac{r}{2}Mg\sin\theta = \frac{1}{2}Mgl\sin^2\theta$

물체의 운동에너지는, 실의 길이가 일정하다면 자기자신의 질량 및 속력과 무관하게 각도와 추 질량에 의해서만 결정된다.

구심력: 반지름이 같다면 구심력은 각속도 제곱 혹은 공전속력 제곱에 비례한다.
주기: 서로 다른 상황에서 실의 길이와 질량비의 곱이 일정하다면 주기는 같다.
각속도: 질량,반지름 등에 관계없이 각속도의 크기는 수직높이에만 비례한다.

인공위성의 공전

[뉴턴 대포 실험]



1. 속력이 느린 경우 지면에 충돌
지구가 더 작았다면 발사지점을 원일점으로 하는 타원궤도 공전

2. 특정 속력과 일치할 경우 등속 원운동

3. 속력이 빠른 경우, 발사지점을 근일점으로 하는
타원 궤도 공전

원운동 조건 : 구심력 = 만유인력,
모든 궤도에서 중력(구심력)이 동일해야됨 $\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$

제1 우주속도: 지표면을 스치듯 등속 원운동하는 속력 $v_1 = \sqrt{gR}$
(용어는 암기할필요 없음)

정지 위성 : 위성의 공전 주기 = 모행성의 자전 주기

서로 다른 위성이 중심 천체를 타원 궤도로 공전할 때
1) 근일점 거리가 같아도 궤도 장반경이 더 긴 위성이 근일점에서 속력 더 크다
2) 서로 각각 중심천체와의 거리가 같은 시점에서, 궤도장반경이 더 큰쪽의 속력이 크다.
3) 거리가 같은 시점에서의 가속도는 질량과 궤도장반경 관계없이 서로 같다

위성의 질량, 궤도의 원/타원 여부 등과 상관없이 중심 천체 (행성/항성) 질량이 일정하다면
중심천체와 같은 거리인 지점에서 중력 및 가속도는 무조건 일정함

[블랙홀]

탈출속도 식과 비례관계를 모두 암기

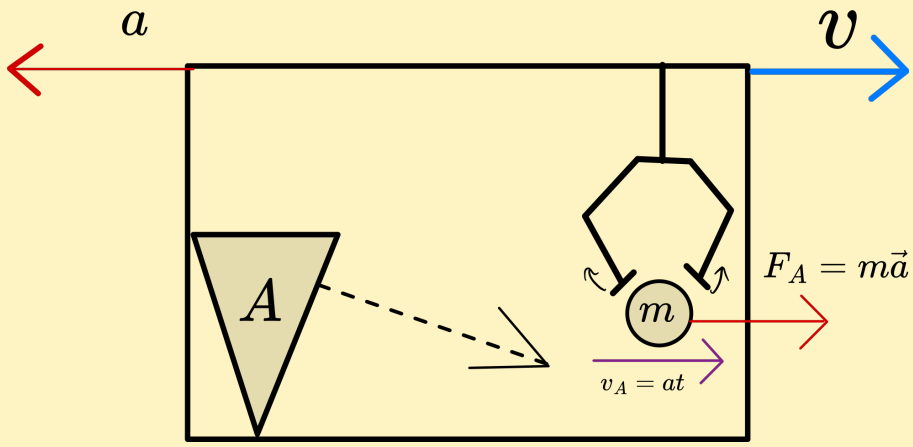
$$V_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow V_E \propto \sqrt{\frac{M}{R}}$$

등가 원리

"가속 좌표계 관찰자가 보는 관성력 효과" = "질량에 따른 중력에 의한 효과"
즉 중력 질량=관성질량

[물체를 가만히 놓는 행위]
특정 가속좌표계 내부에서 물체를 가만히 놓거나, 처음부터 독립적인 자유낙하운동 할 경우
그 물체는 공간적으로는 해당 가속좌표계 내부에 있지만 그 시점부터 별개의 좌표계로 취급됨
특히, 무중력 공간에서 가속운동하는 승강기/우주선 내부에서 물체를 가만히 놓을 경우
그 물체는 즉시 실제로는 관성좌표계가 되지만, 가속계 내부 관찰자는 가속계의 가속도와
반대방향이고 크기가 같은 가속도가 작용한다고 관측됨
즉, 실제로는 관성계 소속 물체가 되지만 가속계에서는 또다른 가속계로 관측됨

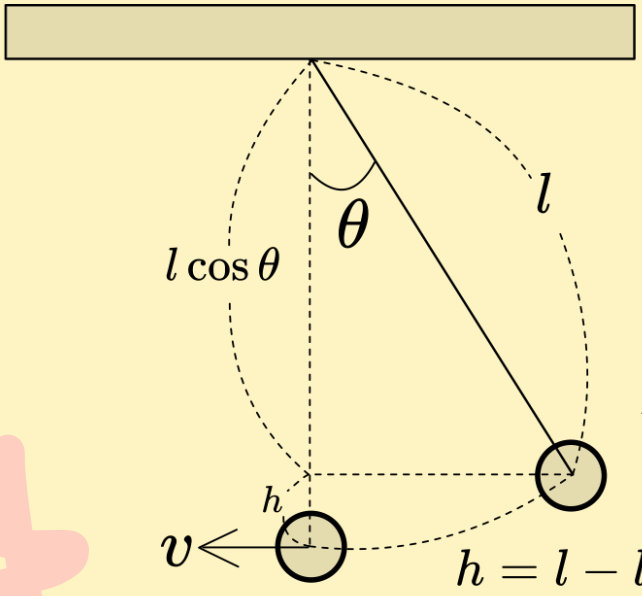
예시)
좌표평면 위에서 +x 방향으로 v 속력으로 아주 빠르게 운동하며 -x 방향으로 a만큼의
약한 가속도가 작용하여, 감속 작용이 일어나고 있는 내부 진공상태의 우주선이 있다.
이 우주선 내부의 고정된 관측시스템 A가 있고, 장치에는 고정하여 붙잡아둔 질량 m짜리 공이 우주선과 함께
붙어서 운동하고 있다. 이때 순간적으로 공의 고정장치를 순식간에 해제하고 공을 무방비 상태로 만들면
(단, 고정 해제과정에서 일어나는 충격력이나 마찰력 등의 모든 저항은 무시한다.),
우주선에 고정된 내부 관측시스템 A에서 공을 볼때,
1) 공의 관성력은 어느방향으로 어떻게 작용하며,
2) 공은 어느방향으로 운동하는가?



공은 실제론 고정이 풀린 시점에 v로 등속 운동하는 관성계가 되지만, 우주선은 여전히 감속하고 있는 상태다
A는 우주선이 정지상태라고 인식하며 감속 상태를 느낄 수 없으므로, 공 혼자 오른쪽 벽을 향해 at의 속력으로
움직인다고 관측한다. 이때 A가 관측시 공의 기존 상대속도는 0이었다가 갑자기 오른쪽 at가 붙은 것이므로
우주선의 감속 방향과 반대방향인 오른쪽으로 관성력이 작용하여, 공이 오른쪽으로 가속하는 것으로 본다,

관성계에서는 공은 고정이 해제된 순간부터 오른쪽 방향 v로 등속 운동하고 우주선은 v-at로 등가속도 운동하여
at의 상대속도만큼 서로 가까워지는 것으로 관측된다.
이때 관성계에서는 공에는 아무 힘이 작용하지 않는 것으로 관측된다.

단진자 운동



각도가 같다면, 속력은 실 길이의 루트비에 비례함!

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \sqrt{2gh}$$

$$E_{P_M} = E_{K_M} = mgl(1-\cos\theta) = mgh$$

경사각 θ 인 빗면에서 단진자 주기

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\theta}}$$

두 진자의 최고점과 최저점의 높이차가 같은것과, 최저점의 속력이 같은것은 필요충분조건이다.
또한 실의 길이와 진동 각도가 같으면 질량에 관계없이 h는 같다.

서로 다른 상황(특히 실 길이나 각도를 안 준)에서 만약 천장의 높이가 동일할 경우
퍼텐셜 에너지 계산은 최저점으로부터 더해가는 방식이 아니라, 천장에서 시작해 아래쪽 방향으로 빼는 방식으로 계산하도록 하자. 실의 길이나 각도가 다르면 최저점의 절대높이(즉 좌표적 위치)가 다를수 있으므로, 항상 일정한 높이인 천장을 기준으로 해서 계산하도록 하자.