2022 개정 교육과정

고1 ~ 고3 · 내신부터 수능까지

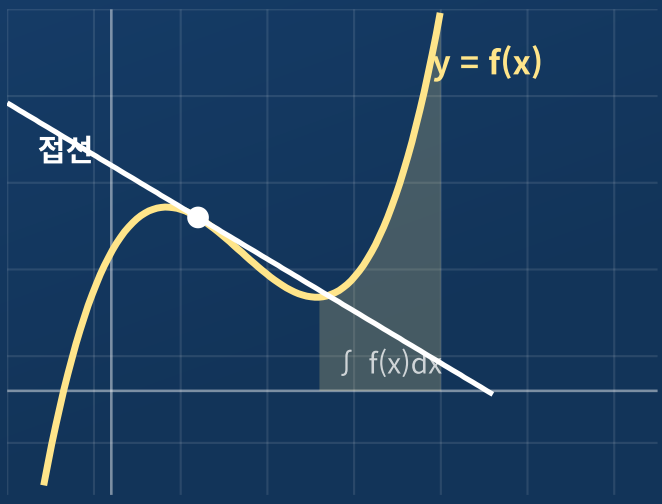
그래서 왜 수학

미적분 I 편

함수의 극한과 연속 · 미분 · 적분

원래 잘하던 사람은 몰랐던
답답함을 풀어주는 수학

김소희 지음



245
평가원 기출 문항
수능 135 · 모의평가 110

2~3
기출마다 풀이 개수
+ 「언제 쓰나」

32+27
교과 개념 + 수능 개념
미적분 I 전 범위 9챕터

2014~2026학년도 수능 · 6월/9월 모의평가 · 2028학년도 수능 예시문항 수록

2022 개정 · 미적분 I

지은이

김소희

연세대학교 시스템생물학과 졸업

그래서 왜 수학 · 미적분 I 편 (2022 개정 교육과정)

지은이 김소희

이 책의 수능·모의평가 기출 문항 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

교과 개념, 수능 개념, 대표 문제, 단계별 연습의 문장과 풀이는 이 책을 위해 새로 썼습니다.

차례

I . 함수의 극한과 연속

A 함수의 극한 5
A-1 함수의 수렴과 발산 · A-2 좌극한과 우극한 · A-3 함수의 극한에 대한 성질 · A-4 극한값의 계산 · A-5 함수의 극한의 대소 관계
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 20 · 모평 13

B 함수의 연속 44
B-1 함수의 연속 · B-2 연속함수의 성질 · B-3 최대·최소 정리 · B-4 사잇값 정리
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 12 · 모평 8

II . 미분

C 미분계수와 도함수 72
C-1 평균변화율과 미분계수 · C-2 미분가능성과 연속성 · C-3 도함수 · C-4 미분법
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 22 · 모평 20

D 접선과 평균값 정리 104
D-1 접선의 방정식 · D-2 롤의 정리 · D-3 평균값 정리
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 10 · 모평 8

E 함수의 증가·감소와 극값 127
E-1 함수의 증가와 감소 · E-2 함수의 극대와 극소 · E-3 함수의 그래프의 개형
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 12 · 모평 12

F 도함수의 활용 153
F-1 함수의 최대와 최소 · F-2 방정식의 실근의 개수 · F-3 부등식에의 활용 · F-4 속도와 가속도
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 14 · 모평 10

III. 적분

G 부정적분 182
G-1 부정적분의 뜻 · G-2 부정적분의 계산 · G-3 미분과 부정적분의 관계
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 8 · 모평 11

H 정적분 201
H-1 정적분의 뜻 · H-2 정적분의 성질 · H-3 정적분으로 정의된 함수
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 19 · 모평 15

I 정적분의 활용 237
I-1 곡선과 x축 사이의 넓이 · I-2 두 곡선 사이의 넓이 · I-3 속도와 거리
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 18 · 모평 13

이 책의 구성

이 책은 ‘원래 잘하던 사람’이 당연하게 넘어가는 곳에서 멈춥니다. 각 챕터는 아래 순서로 읽습니다.

01 이야기로 시작하기 챕터 첫 쪽
생활 속 장면 하나로 이 챕터가 답할 질문을 먼저 던집니다.

02 교과 개념 한 줄 요약 · 이야기로 이해하기
정의를 외우기 전에, 왜 그렇게 정할 수밖에 없었는지부터 설명합니다.

03 사고 흐름 모든 개념과 문제에
“이걸 어떻게 떠올려요?”에 대한 답. 잘하는 사람이 머릿속에서 건너뛰는 한 줄을 적었습니다.

04 수능 개념 교과서에는 없지만 시험에 반복되는 관점
모두 교과 개념으로 증명되는 것만 담았습니다.

05 대표 문제 정석 → 빠른 길
교과서 풀이를 먼저 완성하고, 수능 풀이는 어느 수능 개념을 썼는지 번호로 표시합니다.

06 단계별 연습 기본 · 유형 · 실전
기본은 1회독, 실전은 2회독부터. 해설은 정답, 핵심 한 줄, 개념 번호로 정리했습니다.

07 기출 연습 · 기출 해설 수능 2014~2026, 모의평가, 2028 예시
문항마다 풀이 2~3개와 「언제 쓰나」를 붙였습니다.

08 Review 진단 · 발상 정리 · 개인 발상 노트
답하지 못한 항목은 표시된 절로 돌아가 다시 읽습니다.

색 약속 정석 · 교과서 풀이 | 빠른 길 · 수능 풀이 | 다른 관점 · 검산 | 날개 메모

A 함수의 극한

이야기로 시작하기 — 자동차의 '바로 그 순간' 속력은 어떻게 구할까?

자동차가 출발한 뒤 t초 동안 간 거리가 t^2 m라고 해 봅시다. 2초에서 3초까지 1초 동안 간 거리는 9 − 4 = 5 m이니, 이 구간의 평균 속력은 초속 5 m입니다. 구간을 0.1초, 0.01초로 줄이면 평균 속력은 4.1, 4.01로 바뀝니다.

구간의 길이 h (초)	1	0.1	0.01	0.001
평균 속력 $\frac{(2+h)^2-4}{h}$ (m/s)	5	4.1	4.01	4.001

그렇다면 출발한 지 정확히 2초가 되는 순간의 속력은 얼마일까요? h = 0을 넣으면 $\frac{0}{0}$이 되어 계산이 멈춥니다. 하지만 표는 분명히 4를 향해 가고 있습니다. 이 '다가가는 값'이 바로 극한입니다.

이 챕터에서는 두 가지 질문에 답합니다.

이 표의 '4'는 챕터 C에서 '미분계수'라는 이름으로 다시 만납니다.

이 챕터에서 답할 질문

질문 1 · 대입할 수 없는 곳에도 값이 있을까?

$\frac{0}{0}$처럼 계산이 멈추는 곳에서 함수가 향하는 값은 어떻게 구할까?

→ 함수의 극한 (A-1, A-4)

질문 2 · 양쪽에서 다가간 값이 다르면?

왼쪽에서 다가간 값과 오른쪽에서 다가간 값이 다르면 극한이 있다고 할 수 있을까?

→ 좌극한과 우극한 (A-2)

이 챕터의 길

A-1 함수의 수렴과 발산 — 교과서 개념

A-2 좌극한과 우극한 — 교과서 개념

A-3 함수의 극한에 대한 성질 — 교과서 개념

A-4 극한값의 계산 — 교과서 개념

A-5 함수의 극한의 대소 관계 — 교과서 개념

수능 A-① 분모가 0으로 가는데 극한이 있으면, 분자도 0으로 간다 — 수능 개념

수능 A-② 극한 두 개가 주어지면 다항함수가 결정된다 — 수능 개념

수능 A-③ 합성함수의 극한은 '안쪽이 어느 쪽에서 오는가'를 본다 — 수능 개념

대표 문제 3문항 — 사고 흐름 · 두 풀이

단계별 연습 11문항 — 기본 · 유형 · 실전

기출 연습 수능 20 · 모평 13 — 기출 해설 · Review

1부 · 교과 개념

교과서 개념

이 챕터의 목표는 하나입니다. **‘x가 a에 한없이 가까워질 때 f(x)가 향하는 값’을, a에서의 함숫값과 따로 생각하는 것.** 모든 계산법은 이 한 문장에서 나옵니다.

A-1 함수의 수렴과 발산 교과서 개념

한 줄 요약

극한은 ‘도착한 값’이 아니라 ‘향하는 값’이다.

이야기로 이해하기

바닥에 구멍이 하나 뚫린 다리를 건넌다고 해 봅시다. 구멍 바로 앞까지 걸어가 보면, 구멍 자리에 바닥이 없더라도 그 자리의 높이가 얼마였어야 하는지는 알 수 있습니다. 극한은 ‘구멍 앞까지 다가가며 알게 되는 높이’이고, 함숫값은 ‘구멍 자리에 실제로 놓인 바닥의 높이’입니다.

함수 f(x)에서 x가 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 f(x)의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면, f(x)는 L에 **수렴**한다고 하고 L을 **극한값**(극한)이라 합니다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

사고 흐름 왜 ‘x ≠ a’라는 조건이 붙을까? → 이야기로 시작하기의 평균 속력 $\frac{(2+h)^2 - 4}{h}$는 h = 0에서 정의조차 되지 않습니다. 극한이 필요한 곳이 바로 그런 자리이므로, 극한은 처음부터 a에서의 값을 묻지 않습니다.

경우	쓰는 법	예
일정한 값 L에 수렴	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$
양의 무한대로 발산	$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
음의 무한대로 발산	$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 0} (-\frac{1}{x^2}) = -\infty$
x가 한없이 커질 때	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$	$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

∞는 수가 아니라 ‘한없이 커지는 상태’를 나타내는 기호입니다. 그래서 lim f(x) = ∞는 ‘극한값이 ∞’가 아니라 ‘발산한다’는 뜻입니다.

★ 날개 메모

다항함수의 그래프에는 구멍이 없으므로 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$입니다. 그래서 다항함수의 극한은 대입하면 끝납니다. 대입이 막히는 곳(분모가 0이 되는 곳, 식이 바뀌는 곳)에서만 주의하면 됩니다.

A-2 좌극한과 우극한 교과서 개념

한 줄 요약

왼쪽 길과 오른쪽 길이 같은 곳에 도착해야 극한이 있다.

이야기로 이해하기

두 친구가 양쪽에서 터널을 파 들어간다고 해 봅시다. 가운데서 같은 높이로 만나야 터널이 이어집니다. 높이가 다르면 터널은 끊긴 채로 남습니다. 극한도 마찬가지로, 왼쪽과 오른쪽에서 다가간 값이 같아야 존재합니다.

★ 날개 메모

'x→0+'의 +는 '양수 쪽에서'라는 뜻이지 '더하기'가 아닙니다. x→1−는 0.9, 0.99, 0.999…처럼 1보다 작은 값으로 다가갑니다.

x가 a보다 작으면서 a에 다가갈 때의 극한을 **좌극한**, 크면서 다가갈 때의 극한을 **우극한**이라 합니다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L$$

사고 흐름 좌극한과 우극한을 따로 구해야 하는 곳은 어디일까? → 함수의 식이 바뀌는 곳입니다. 구간별로 정의된 함수의 경계, |x − a|가 들어 있는 함수의 x = a가 대표적입니다. 식이 하나로 이어지는 곳에서는 따로 구할 필요가 없습니다.

f(x)	좌극한 (x→0−)	우극한 (x→0+)	$\lim_{x\to 0} f(x)$
$\lvert x\rvert/x$	−1	1	없다
$x + \lvert x\rvert$	0	0	0
$\frac{1}{x}$	−∞	∞	없다

A-3 함수의 극한에 대한 성질 교과서 개념

한 줄 요약

수렴하는 것끼리는 더하고 빼고 곱하고 나눌 수 있다.

이야기로 이해하기

두 버스가 각각 서울역과 용산역으로 가고 있다면, 두 버스 사이의 거리는 결국 두 역 사이의 거리에 가까워집니다. 각각의 도착지가 정해져 있으면, 둘을 더하거나 빼서 만든 값의 도착지도 정해집니다. 하지만 버스 하나라도 도착지 없이 돌아다니면 이 성질을 쓸 수 없습니다.

★ 날개 메모

몫의 극한에서 β = 0이면 성질을 쓸 수 없습니다. 이때 분자도 0으로 가면 $\frac{0}{0}$ 꼴이 됩니다. A-4의 계산법과 수능 개념 A-①의 미정계수 문제가 바로 이 경우를 다룹니다.

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

연산	극한
상수배	$\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$
합·차	$\lim_{x\to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$
곱	$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
몫	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

사고 흐름 왜 '두 극한이 모두 수렴할 때'라는 조건이 중요할까? → 반례를 보면 분명해집니다. $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$이면 $x\to 0$에서 $g(x)$는 발산하지만 $f(x)g(x)$는 항상 1이므로 1로 수렴합니다. 거꾸로, $f(x)g(x)$가 수렴한다고 해서 $f(x)$와 $g(x)$가 각각 수렴하는 것은 아닙니다.

A-4 극한값의 계산 교과서 개념

한 줄 요약

대입이 막히면 식의 모양을 바꿔서 막힌 곳을 없앤다.

이야기로 이해하기

문이 잠긴 방에 들어가려면 문을 부수는 대신 열쇠를 찾습니다. $\frac{0}{0}$이나 ∞/∞은 답이 없다는 뜻이 아니라, 문이 잠겨 있다는 뜻일 뿐입니다. 문의 모양마다 맞는 열쇠가 정해져 있습니다.

★ 날개 메모

$x\to-\infty$에서 루트가 있으면 $\sqrt{(x^2)} = |x| = -x$입니다. 부호를 놓치는 일이 가장 흔한 실수입니다. 헷갈리면 $x = -t$로 바꿔 $t\to\infty$로 계산하세요.

막힌 모양	열쇠	예
$\frac{0}{0}$ (다항식)	인수분해 후 약분	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$
$\frac{0}{0}$ (루트)	유리화 후 약분	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$
∞/∞	분모의 최고차항으로 나누기	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-x} = 2$
$\infty - \infty$ (루트)	유리화해서 ∞/∞로	$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x^2+x)} - x) = \frac{1}{2}$
$\infty \times 0$	통분·정리해서 위의 꼴로	$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x+1}) = 1$

사고 흐름 $\frac{0}{0}$ 꼴에서 $(x-1)$로 약분해도 되는 이유는 무엇일까? → 극한은 $x \neq 1$인 값만 봅니다(A-1). $x \neq 1$이면 $x - 1 \neq 0$이므로 나눌 수 있습니다. '극한의 정의에 있는 $x \neq a$'가 약분의 허가증인 셈입니다.

파워게임 — x→∞의 극한은 '가장 센 항만 살아남는 싸움'입니다. x = 1000이면 x^2 = 1,000,000이고 3x = 3,000이라, 3x는 x^2의 0.3%에 불과합니다. x가 커질수록 낮은 차수의 항은 존재감이 사라집니다. 그래서 x→∞에서는 분자와 분모에서 각각 **최고차항만 남기고 나머지는 지워도 됩니다.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-x} \;\to\; \frac{2x^2}{x^2}=2$$

분자와 분모의 최고차항끼리 붙으면 결과는 세 가지뿐입니다. 분모가 더 세면 0, 동점이면 계수의 비, 분자가 더 세면 발산입니다.

분자와 분모의 차수	$\lim_{x\to\infty}$ (분자)/(분모)
분자 < 분모	0
분자 = 분모	(분자의 최고차항의 계수)/(분모의 최고차항의 계수)
분자 > 분모	∞ 또는 −∞ (발산)

파워게임에서 '동점이라 빼면 0'이 되는 경우가 ∞ − ∞ 꼴입니다. $\sqrt{}(x^2+x)$와 x는 둘 다 'x급'이라 최고차항만 보면 x − x = 0으로 보이지만 답은 $\frac{1}{2}$입니다. 동점일 때는 유리화로 다음 선수를 꺼내 다시 결승을 치러야 합니다.

A-5 함수의 극한의 대소 관계 교과서 개념

한 줄 요약

양쪽에서 같은 값으로 조여 오면, 가운데도 그 값으로 간다.

이야기로 이해하기

두 경찰관이 양쪽에서 용의자를 끼고 같은 경찰서로 간다면, 용의자도 그 경찰서로 갈 수밖에 없습니다. 그래서 이 성질을 '샌드위치 정리'라고도 부릅니다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

1. $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$
2. $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

사고 흐름 f(x) < g(x)이면 극한도 α < β일까? → 아닙니다. x ≠ 0이면 $0<x^2$이지만 x→0에서 두 극한은 모두 0입니다. 극한을 취하면 '<'가 '≤'로 느슨해질 수 있습니다.

★ 날개 메모

문제에 '모든 실수 x에 대하여 ○ ≤ f(x) ≤ □'가 보이면 f(x)의 식을 구하려 하지 마세요. 양쪽 극한이 같은지만 확인하면 됩니다.

개념 예제 한 줄씩 따라 쓰기

EX 01 함수 f(x) = {x + 3 (x < 1), x^2 (x ≥ 1)}에 대하여 $\lim_{x\to1-}$ f(x), $\lim_{x\to1+}$ f(x)를 구하고, $\lim_{x\to1}$ f(x)가 존재하는지 조사하시오.

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & (x<1)\\ x^2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

1. 도구: 식이 바뀌는 곳 → 좌·우극한을 따로 (A-2)
2. 좌극한: x < 1 쪽의 식 x + 3에 대입 → 4
3. 우극한: x ≥ 1 쪽의 식 x^2에 대입 → 1
4. 4 ≠ 1이므로 극한은 **존재하지 않는다**.

EX 02 $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

1. 도구: $\dfrac{0}{0}$ 꼴(다항식) → 인수분해 (A-4)
2. $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$
3. $\lim_{x\to2}(x + 3)$ = **5**

EX 03 $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

1. 도구: $\dfrac{0}{0}$ 꼴(루트) → 분자의 유리화 (A-4)
2. 분자·분모에 $\sqrt{(x + 4)} + 2$를 곱하면 $\dfrac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$
3. 대입하면 $\dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

EX 04 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+5}{2x^2+3x}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+5}{2x^2+3x}$$

1. 도구: ∞/∞ 꼴, 차수가 같다 → 최고차항 계수의 비 (A-4)
2. 분자·분모를 x^2으로 나누면 $\dfrac{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{4}{2}$ = **2**

EX 05 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2x-1 \le f(x) \le x^2$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값을 구하시오.

1. 도구: 양쪽에서 조이기 (A-5)
2. $\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$, $\lim_{x\to 1} x^2=1$
3. 양쪽 극한이 같으므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=$ **1**
4. 확인: $x^2-(2x-1)=(x-1)^2 \ge 0$이므로 모든 실수에서 $2x-1 \le x^2$이고, 조건을 만족시키는 $f(x)$가 실제로 존재합니다. 두 그래프는 $x=1$에서 접합니다.

2부 · 수능 개념

시험에서 반복되는 관점

아래 세 가지는 교과서 본문에는 없지만 시험에 반복해서 나오는 관점입니다. 모두 1부 개념(극한의 성질)으로 증명할 수 있습니다.

수능 개념 A-① 분모가 0으로 가는데 극한이 있으면, 분자도 0으로 간다

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ (L은 실수)이고 $\lim_{x\to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$입니다.

증명: $f(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)}\} \times g(x)$이고 두 인수가 모두 수렴하므로, 극한의 성질(A-3)에 의해 $\lim f(x) = L \times 0 = 0$.

주어진 것	바로 쓸 수 있는 것
분모 → 0, 극한값 있음	분자 → 0 (분자에 a를 대입하면 0)
분자 → 0, 극한값이 0이 아닌 실수	분모 → 0

두 번째 줄의 증명: $g(x) = f(x) \div \{\frac{f(x)}{g(x)}\} \to 0 \div L = 0$ ($L \neq 0$).

★ 날개 메모

미정계수 문제는 '대입해서 0'으로 식 하나, '약분한 뒤 극한값'으로 식 하나를 얻습니다. 미지수가 2개이면 이 두 식으로 모두 구할 수 있습니다.

수능 개념 A-② 극한 두 개가 주어지면 다항함수가 결정된다

다항함수 f(x)에 대한 극한 조건은 두 종류로 읽습니다.

조건	읽는 법
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n} = c$ ($c \neq 0$)	f(x)는 n차, 최고차항은 cx^n
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n} = 0$	f(x)의 차수는 n보다 작다
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a} = c$	$f(a) = 0$, $f(x) = (x-a)Q(x)$로 놓으면 $Q(a) = c$

파워게임(A-4)으로 읽으면, 'x→∞' 조건은 f(x)의 **꼭대기**(차수와 최고차항)를, 'x→a' 조건은 **뿌리**(인수)를 알려 줍니다. 두 조건을 합치면 식을 세울 수 있습니다.

★ 날개 메모

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2} = 2$처럼 '빼고 나눈 모양'은 $f(x) - x^3$이 최고차항 $2x^2$인 이차식이라는 뜻입니다. 즉 $f(x) = x^3 + 2x^2 +$ (일차 이하).

수능 개념 A-③ 합성함수의 극한은 '안쪽이 어느 쪽에서 오는가'를 본다

$\lim_{x\to a} f(g(x))$는 $t = g(x)$로 놓고 두 단계로 나눕니다.

1. x→a일 때 t = g(x)가 어디로, **어느 쪽에서** 다가가는지 본다. (b보다 큰 쪽 → t→b+, 작은 쪽 → t→b−, 계속 b와 같으면 t = b)
2. 그 방향으로 f(t)의 극한을 구한다. t가 b에 머물면 극한이 아니라 함숫값 f(b)를 씁니다.

x→a일 때 g(x)의 움직임	$\lim_{x\to a} f(g(x))$
b보다 큰 값에서 b로	$\lim_{t\to b+} f(t)$
b보다 작은 값에서 b로	$\lim_{t\to b-} f(t)$
항상 b (상수)	f(b)

★ 날개 메모

그래프 문제에서는 g의 그래프가 점 부근에서 올라가는지 내려가는지, 수평인지를 먼저 적어 두세요. 합성함수 극한의 실수는 대부분 '방향'을 빼먹어서 생깁니다.

대표 문제

사고 흐름 → 정석 → 빠른 길

모든 대표 문제는 교과서적 해법을 먼저 완성하고, 수능적 해법에는 사용한 수능 개념의 번호를 표시합니다. 스스로 두 풀이를 모두 써 본 뒤 해설과 비교하세요.

대표 01

이해 · 3점

정답 −5

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ = 5일 때, a + b의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$$

사고 흐름 미지수는 2개인데 주어진 식은 하나뿐일까요? → 분모가 0으로 가는데 극한값이 있다는 사실에서 식이 하나 더 나옵니다. '분자도 0으로 간다'와 '약분한 뒤의 극한값이 5', 이렇게 식이 두 개입니다.

교과서적 해법

- x→2일 때 분모 → 0이고 극한값이 존재하므로 분자 → 0, 즉 4 + 2a + b = 0입니다.
- b = −2a − 4를 대입하면 $x^2 + ax - 2a - 4 = (x-2)(x+a+2)$이므로 극한값은 2 + a + 2 = a + 4 = 5.
- 따라서 a = 1, b = −6이고 a + b = **−5**.

수능적 해법

- [수능 개념 A-①] — 분자는 x = 2에서 0이므로 처음부터 (x − 2)(x + k)로 놓습니다.
- 극한값 2 + k = 5에서 k = 3, 분자 = $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$.
- a + b = 1 − 6 = −5.

대표 02

추론 · 4점 · 단답형

정답 14

다항함수 f(x)가 다음 두 조건을 만족시킬 때, f(3)의 값을 구하시오. (가) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ = 2 (나) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$ = 3

$$(가)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2 \qquad (나)\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

사고 흐름 f(x)를 어떻게 놓을까요? → (가)는 차수와 최고차항($2x^2$)을, (나)는 인수 (x − 1)을 줍니다. 꼭대기와 뿌리를 합치면 미지수가 하나만 남습니다.

교과서적 해법

- (가)에서 $f(x) = 2x^2 + px + q$.
- (나)에서 분모 → 0이므로 $f(1) = 2 + p + q = 0$, $q = -p - 2$.
- 이때 $f(x) = (x - 1)(2x + p + 2)$이므로 (나)의 극한값은 $2 + p + 2 = 3$, $p = -1$, $q = -1$.
- $f(x) = 2x^2 - x - 1$이고 $f(3) = 18 - 3 - 1 =$ **14**.

수능적 해법

- [수능 개념 A-②] — 처음부터 $f(x) = (x - 1)(2x + r)$로 놓습니다.
- (나)에서 $2 + r = 3$, $r = 1$.
- $f(3) = 2 \times 7 = 14$.

대표 03

추론 · 4점

정답 10

함수 $f(x) = \{x + 2\ (x < 1),\ x^2 - 1\ (x \geq 1)\}$에 대하여 $\lim_{x\to 1+} f(f(x)) + \lim_{x\to 1-} f(f(x))$의 값을 구하시오.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<1) \\ x^2-1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

사고 흐름 바깥 f에는 어떤 값을 넣어야 할까요? → 안쪽 f(x)가 '어느 값으로, 어느 쪽에서' 다가가는지부터 적습니다. 바깥 f는 그 방향으로만 봅니다.

교과서적 해법

t = f(x)로 놓습니다.

x의 움직임	t = f(x)	t의 움직임	f(t)의 극한
$x\to 1+$	$x^2 - 1$	0보다 큰 값에서 0으로 ($t\to 0+$)	$t < 1$ 구간 → $t + 2 \to 2$
$x\to 1-$	$x + 2$	3보다 작은 값에서 3으로 ($t\to 3-$)	$t \geq 1$ 구간 → $t^2 - 1 \to 8$

★ 날개 메모

바깥 함수에서 '방향'이 중요해지는 것은 t가 다가가는 값이 바로 끊긴 점일 때뿐입니다. 그런 문제는 기출 연습에서 다시 만납니다.

따라서 $2 + 8 = \mathbf{10}$.

수능적 해법

- [수능 개념 A-③] — ‘안쪽의 방향’만 표시합니다.
- $1^+ \to 0^+ \to 2$, $1^- \to 3^- \to 8$.
- 바깥 f에서 0과 3은 식이 바뀌는 점(1)이 아니므로 방향과 상관없이 대입해도 됩니다.
