수리논술

서강대



은결T MATH

유형별 학습 지도

유형 1 정리를 골라 증명 시작하기 7 쪽

대표 문제 1 부터 3

유형 2 적분으로 정의된 함수를 읽기 24 쪽

대표 문제 4 와 5

유형 3 도형에서 계산하기 편한 변수를 고르기 40 쪽

대표 문제 6 과 7 및 연결 문제 1 과 2

유형 4 최대와 최소를 조건까지 확인하기 65 쪽

대표 문제 8 과 9

유형 5 그래프 조건을 식으로 바꾸기 85 쪽

대표 문제 10 과 11 및 보충 대표 문제 19

유형 6 수열과 급수를 함수에 연결하기 114 쪽

대표 문제 12 부터 14 및 연결 문제 3

유형 7 범위 안의 정수점을 빠짐없이 세기 136 쪽

대표 문제 15 와 16

유형 8 조건부확률과 기댓값을 구분하기 150 쪽

대표 문제 17 과 18

확인 문제와 해설 169 쪽

확인 문제 6 개는 본교재 제작 연습이다. 대학 기출과 구분하여 마지막에 두었다.

유형 1 정리를 골라 증명 시작하기

정리는 결론에 맞추어 고른다

문제에서 **어떤 점이 존재함을 보이라**고 하면, 그 점에서 구하려는 것이 함숫값인지 미분계수인지 먼저 구별한다.

1 어떤 값을 찾는지 비교하기

원하는 결론	먼저 떠올릴 정리	확인할 조건
$f(c)=k$	사잇값정리	연속인 함수의 양 끝값 사이에 k가 있는가
$f'(c)=0$	롤의 정리	연속이고 내부에서 미분가능하며 두 끝값이 같은가
$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	평균값정리	연속이고 내부에서 미분가능한 구간을 정했는가

2 그래프의 높이를 찾으면 사잇값정리

예로 이해하기 끊어지지 않는 그래프가 높이 1에서 높이 5로 가면 중간 높이 3을 적어도 한 번 지난다.

해의 존재에 쓰기 연속인 함수에 대해 $H(a)<0<H(b)$이면, a와 b 사이에 $H(c)=0$인 점이 있다.

3 접선의 기울기를 찾으면 평균값정리

두 끝점을 이은 직선의 기울기와 같은 접선이 구간 안에 적어도 하나 있다.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a<c<b)$$

조건 확인 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능해야 한다. 끝점에서는 미분가능까지 요구하지 않는다.

4 두 끝값이 같으면 롤의 정리

평균값정리에서 $f(a)=f(b)$이면 평균 기울기가 0이므로 $f'(c)=0$이다. **롤의 정리는 평균값정리의 특별한 경우**다.

주의 세 정리 모두 적어도 한 점의 존재를 보장한다. 그 점이 하나뿐인지는 따로 증명해야 한다.

대표 문제 1 평균값정리에서 보조함수까지

문제를 먼저 읽고 풀어 보세요

① 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$에 평균값정리를 적용하여 $-1<x<0$일 때 부등식 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$이 성립함을 보이시오.

② 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 $x\in(a,b)$에 대하여 $f(x)>0$을 만족할 때,

$$\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(c)}$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

대표 문제 1 접근 방법

문제의 어떤 조건에서 이 풀이를 떠올리는가

① 두 함숫값의 차를 찾아 구간을 정한다

왼쪽의 제곱근은 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$의 값이다. 오른쪽의 1은 $f(0)$이다. 따라서 문제의 식에는 $f(x)$와 $f(0)$이 숨어 있다. 두 점을 연결하는 구간은 $[x,0]$이다. 지금은 $x<0$이므로 작은 수를 앞에 놓아야 한다.

첫 줄에는 "함수 $f(t)=\sqrt{1+t}$는 $[x,0]$에서 연속이고 $(x,0)$에서 미분가능하다"라고 쓴다. 문제에 이미 있는 x를 구간 끝값으로 고정하고, 함수의 입력 문자를 t로 따로 쓰면 덜 헷갈린다.

② 미분한 결과를 거꾸로 읽는다

목표에 $\frac{f'(c)}{f(c)}$가 보인다고 바로 로그를 씌울 필요는 없다. 양 끝에서 함수가 양수라는 조건은 없으므로 로그함수는 끝점에서 정의되지 않을 수 있다. 대신 곱을 미분한 다음 그 곱으로 나누는 모습을 떠올린다.

$g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$

이 함수는 $x=a$일 때 첫 인수가, $x=b$일 때 둘째 인수가 0이다. 그래서 두 끝값이 같다. 롤의 정리를 적용하면 내부 어딘가에서 $g'(c)=0$이 된다. 그 식을 정리해 목표를 얻는다.

대표 문제 1 대학 공식 예시답안

2022 학년도 모의논술 2 차 원문 1-1 과 1-2

공식 답안의 제시문 [가]는 평균값정리이다. 두 끝값이 같은 경우에는 롤의 정리가 된다.

원문 1-1

$f(x)=\sqrt{1+x}$에 대하여 닫힌구간 $[x,0]$에 제시문 [가]의 평균값 정리를 적용하면 $x<c<0$인 적당한 c가 존재하여

$$\frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}>\frac{1}{2}$$

가 성립하므로 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$이다.

원문 1-2

$g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$라 놓으면 $g(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$이다. 따라서 제시문 [가]의 평균값정리에 의하여 $g'(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 존재한다.

$g'(x)=(x-a)f(x)+(x-b)f(x)+(x-a)(x-b)f'(x)$

로부터 $0=(c-a)f(c)+(c-b)f(c)+(c-a)(c-b)f'(c)$를 얻는다. 등식의 양변을 $(c-a)(c-b)f(c)$로 나누면

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{f'(c)}{f(c)}=0$$

이 성립하여 $\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(c)}$을 얻는다.

대표 문제 1 대학 공식 채점기준

기준을 뒷받침하는 내 답안의 쪽수나 줄을 적습니다

원문 문항	대학에서 제시한 기준	배점	내 답안 근거
1-1	$f(x)=\sqrt{1+x}$에 대하여 닫힌구간 $[x,0]$에 평균값 정리를 적용하면 1 점, 올바른 적용을 통해 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$을 증명하면 1 점을 부여한다.	2 점	
1-2	$g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$라 놓고 시작하면 1 점, 증명을 완성하면 1 점을 부여한다.	2 점	

쉬운 추가 해설

① 부등호 확인 $x<c<0$이므로 $\sqrt{1+c}<1$이다. 따라서 공식 답안의 미분계수는 $\frac{1}{2}$보다 크다. **양수** $-x$를 곱하므로 부등호 방향은 그대로다.

② 나누기와 부호 확인 세 인수를 하나씩 미분해 더하므로 세 항이 생긴다. $a<c<b$, $f(c)>0$이므로 $(c-a)(c-b)f(c)$는 영이 아니다. 이 식으로 나눈 뒤 $c-a=-(a-c)$와 $c-b=-(b-c)$의 부호를 정리한다.

자가 첨삭 기록

① 적용 구간과 부등호 방향을 적었는가.
② 롤의 정리 조건과 나누어도 되는 근거를 적었는가.

빠진 조건 또는 근거 _____

고칠 범위 □ 계산이나 문장 일부 □ 핵심 논증부터 전체

수정할 문장이나 계산을 직접 쓰기