2027학년도 / 수리논술

중앙대

경영경제

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

B1 · 문제와 답안

불균등 등급과 품질 점수

수학 1대문항 · 20점 · 예상 25–35분

시간은 편집 추정이며 학생 실측값이 아닙니다. 공식 120분은 언어 2문항과 수학 1문항의 전체 시간입니다.

한 제품의 등급 T는 $0, 1, 2$ 중 하나이며

$$P(T=0)=\frac{1}{4}, \qquad P(T=1)=\frac{1}{2}, \qquad P(T=2)=\frac{1}{4}$$

이다. 서로 독립적으로 뽑은 두 제품의 등급 차의 절댓값을 X, 그 기댓값을 E라 한다.

별도로 측정하는 성능지표는 평균 m, 표준편차 3인 정규분포를 따른다. 크기 9인 임의표본의 표본평균을 Y라 하자. $1 \le m \le 6$, $a > 0$일 때 품질 점수는

$$V = -3Y^2 + 18m - aE$$

이다. 관리자가 V의 기댓값을 최대화하도록 m을 정할 때, 그 최대 기댓값이 18 이상이 되도록 하는 a의 최댓값을 구하고 과정을 쓰시오.

풀이 시작

B1 · 답안 작성

정답과 함께 선택한 식의 이유, 계산, 허용 구간과 등호를 보여 주세요.

최종 답 _____

B1 · 상세해설

불균등 등급과 품질 점수

첫 판단과 이유

등급 결과 아홉 쌍이 같은 확률인 것은 아닙니다. 각 쌍의 확률을 곱하여 더한 다음, 음수인 이차항 때문에 꼭짓점에서 최대가 되는지 확인합니다.

1. 등급 차의 세 경우

같은 등급이 나오는 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$입니다. 차가 2인 쌍은 $(0,2),(2,0)$이므로 확률은 $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$입니다. 차가 1일 확률은 남은 $\frac{1}{2}$입니다.

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$$E=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}.$$

2. 표본평균의 제곱

$\mathsf{E}(Y)=m$, $\mathsf{Var}(Y)=\frac{9}{9}=1$이므로 $\mathsf{E}(Y^2)=m^2+1$입니다. 따라서

$$\mathsf{E}(V)=-3m^2+18m-3-\frac{3}{4}a=-3(m-3)^2+24-\frac{3}{4}a.$$

꼭짓점 $m=3$은 허용 구간 $[1,6]$ 안에 있으므로 유일한 최대점입니다.

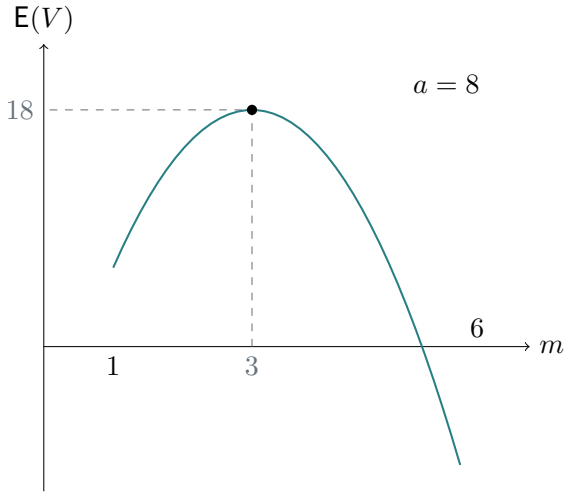
B1 · 조건과 결론

3. 상한과 등호

최대 기댓값이 18 이상일 조건은

$$24 - \frac{3}{4}a \geq 18 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < a \leq 8.$$

$a = 8$, $m = 3$일 때 실제 점수의 기댓값이 18이므로 구하는 최댓값은 $\boxed{8}$입니다. 양끝 $m = 1, 6$에서는 제곱항 때문에 이보다 작습니다.



허용 구간 $[1, 6]$ 안의 꼭짓점에서만 최대를 얻습니다.

B1 · 제출 답안과 채점

정답 8

모범답안

등급 차 X의 분포는 $0, 1, 2$에 각각 $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$이므로 $E = \frac{3}{4}$이다. 표본평균에 대해 $\mathrm{E}(Y^2) = m^2 + 1$이므로 $\mathrm{E}(V) = -3(m-3)^2 + 24 - \frac{3}{4}a$이다. 최대는 $m = 3$에서 얻고, $24 - \frac{3}{4}a \geq 18$에서 $0 < a \leq 8$이다. 등호가 가능하므로 답은 8이다.

부분점수 기준 · 합계 20점

점수	확인할 근거
8점	등급 차의 올바른 확률과 E
7점	표본평균의 평균·분산 및 제곱의 기댓값
5점	내부 최대점·상한·등호

BlueMath 연습용 배점입니다. 대학의 미공개 세부 채점표를 대신하지 않습니다.

감점으로 이어지는 실수

세 등급의 확률이 다르므로 경우의 수만 세어 9로 나누면 안 됩니다. 최고차항 계수가 음수이므로 A1의 양끝 선택을 그대로 따라가지 않습니다.

정당한 빠른 접근

차가 0과 2인 확률을 먼저 구하면 차가 1인 경우를 네 쌍씩 직접 적지 않아도 됩니다.

출처와 연결

신규 B1. 2027 경영경제 모의의 등급 차→표본평균 제곱→최적화 구조를 재현. 등급 확률, 표본 수, 이차항 부호를 바꾸어 최적점이 구간 내부에 오게 설계.