2027학년도 / 수리논술

덕성여대

자연계열 I

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BlueMath 2027

덕성여대 자연 I · B1

문제편 · 전형 재현

대상과 시험 조건

서울 쌍문캠퍼스 · 논술전형 · 과학기술대학

수학·수학 I ·수학 II · 90분 · 2대문항·6소문항

대문항400·600점 · 총1000점

응시 기록

이름: _____

시작: _____ 종료: _____

배점의 의미

올해 공식 모의의40·60점을1000점 체계의400·600점으로 환산했습니다. 실제 모집요강의 논술 배점은 1000점입니다. 대학이 공개하지 않은 올해 본고사의 문항별 배점을 확정한 표가 아닙니다.

답안 작성

제시된 물음에 구체적인 풀이와 이유를 씁니다. 글자 수 제한은 없으나 지정된 답안 양식 안에 적습니다. 이 책의 연습 답안지는 공식 답안지를 복제한 것이 아닙니다.

시간 배분

대문항1 약40분, 대문항2 약50분을 기준으로 읽기와 검토 시간을 포함해 배분합니다. 실제 소문항별 제한시간이 아니라 연습 기준입니다.

최민구 T

BlueMath 연습자료 · 대학 공식 시험지가 아닙니다.

B1-1 · 문제 1 400점

양수 p, q, r에 대하여12개의 양수 $a_1, \ldots, a_{12}$가

$$a_{2m-1} = pr^{m-1} \quad (1 \le m \le 6), \qquad a_n a_{13-n} = q \quad (1 \le n \le 12), \qquad a_1 + a_2 = 8$$

을 만족한다. 각 소문항의 추가 조건은 그 소문항에만 적용한다.

(1) 80점

a_{2m}을 p, r, m의 식으로 나타내고, q를 p, r의 식으로 나타내시오.

(2) 120점

$\displaystyle\sum_{n=1}^{12} a_n = 504$일 때 r의 값을 구하시오.

(3) 200점

$r = 2, q = 384$일 때 $W = \displaystyle\sum_{n=1}^{12} n a_n$의 최댓값과 그때의 p를 구하시오.

B1-2 · 문제 2 600점

최고차항의 계수가1인 이차함수 f가 $f(0)=3$, $f(2)=-1$을 만족한다. 실수 전체에서 $H(x)=f(x)^2-4f(x)$로 정의한다. $k\geq 0$에 대하여

$$C(k)=\{x \mid H(x)=H(k),\ x\geq 0\}$$

라 하고 $N(k)$를 집합 $C(k)$의 원소의 개수라 하자.

(1) 120점

$f(x)$와 $H(x)$를 x에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 210점

$H(x)=H(k)$가 $f(x)=f(k)$ 또는 $f(x)=4-f(k)$와 동치임을 보이고, 실수 전체에서 H의 증가·감소와 극값을 구하시오.

(3) 270점

$N(k)$의 최댓값과 그 값을 갖는 모든 $k\geq 0$의 범위를 구하시오. 범위의 양끝을 포함하는지 설명하시오.

B1-1 · 두 등비수열과 가중한 합

(1) 첫 판단과 이유

곱이 되는 항의 번호를 바꾸어 짝수항을 찾고, 첫 두 항의 합을 적용합니다.

풀이

$a_{13-2m} = pr^{6-m}$이므로 $a_{2m} = \frac{q}{p} r^{m-6}$입니다. $a_2 = 8 - p$이므로

$$a_{2m} = (8-p)r^{m-1}, \qquad q = p(8-p)r^5, \qquad 0 < p < 8.$$

역으로 이 식과 범위를 사용하면 모든 대응 항의 곱이 q가 되어 조건이 충분합니다.

정답·부분점수

$a_{2m} = (8-p)r^{m-1}$, $q = p(8-p)r^5$

대응 첨자와 일반항40점 · q·양수 범위40점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

(2) 첫 판단과 이유

두 항씩 묶은 합을 공비에 대한 다항식으로 씁니다. 양의 공비라는 조건으로 유일성을 확인합니다.

풀이

$a_{2m-1} + a_{2m} = 8r^{m-1}$이므로

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 = 63.$$

$r = 2$에서 성립합니다. 왼쪽은 $r > 0$에서 엄격히 증가하므로 양의 해는2뿐입니다. 예를 들어 $p = 1$로 잡으면 양수인 모든 항을 구성할 수 있습니다.

정답·부분점수

$r = 2$

묶은 합50점 · 후보30점 · 유일성·존재40점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

B1-1 · (3) 상세해설

첫 판단과 이유

곱 조건은 첫 항의 두 후보를 만듭니다. 가중한 합에서는 홀수항과 짝수항의 순서가 달라져 두 후보가 같은 값을 주지 않습니다.

풀이

$32p(8-p)=384$이므로 $p^2-8p+12=0$, 즉 $p=2,6$입니다. 둘 다 허용됩니다. 두 항씩 가중합을 묶으면

$$(2m-1)a_{2m-1}+2ma_{2m}=\{(2m-1)p+2m(8-p)\}2^{m-1}=(16m-p)2^{m-1}.$$

$T=\sum_{m=1}^{6} m2^{m-1}$라 놓고 $2T-T$를 같은 지수끼리 빼면

$$T=6\cdot 2^6-(1+2+4+8+16+32)=384-63=321.$$

따라서 $W=16\cdot 321-63p=5136-63p$입니다. $p=2$에서5010, $p=6$에서4758이므로 최댓값은5010이고 그때 $p=2$입니다.

정답·부분점수

$W_{\max}=5010,\ p=2$

두 후보50점 · 가중합의 식60점 · 유한합50점 · 최대 비교40점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

감점 요소

a_1과 a_2를 바꾸면 보통 합은 같아도 가중합 W는 다릅니다. p의 한 후보만 선택하지 않습니다.

B1-1 · 모범답안과 복습

제출용 모범답안

(1) 짝수항은 $(8-p)r^{m-1}$이고 $q=p(8-p)r^5$이다. (2) $1+r+\cdots+r^5=63$에서 양의 해는2이다. (3) $p=2,6$이고 $W=\sum(16m-p)2^{m-1}=5136-63p$이다. 그러므로 p=2일 때5010으로 최대이다.

정당하게 줄이는 계산

첫 항 두 후보를 각각12개 항으로 쓰지 않고, 두 항씩 묶어 p에 관한 일차식으로 만듭니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규. 2027 모의 자연 I 문제1의 두 수열 결합을 재현하되, 서로 다른 곱의 합 대신 같은 곱을 주는 두 배열의 가중합을 비교. 연결: 기존 일반 기본01 문제1 → A1-1.

내가 다시 쓸 근거

B1-2 · 정의역을 제한한 합성함수의 실근

(1) 첫 판단과 이유

이차식의 계수부터 정하고 중심 x=2에 맞추어 식을 정리합니다.

풀이

$f=x^2+bx+c$에서 $c=3$, $4+2b+3=-1$이므로 $b=-4$입니다.

$$f(x)=(x-2)^2-1, \qquad H(x)=(x-2)^4-6(x-2)^2+5.$$

전개하면 $H(x)=x^4-8x^3+18x^2-8x-3$입니다.

정답·부분점수

$f=(x-2)^2-1$, $H=(x-2)^4-6(x-2)^2+5$

f 결정60점 · H 정리60점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

(2) 첫 판단과 이유

같은 함수값을 인수분해하고, 전개한 다항식의 도함수 부호를 조사합니다.

풀이

$H(x)-H(k)=\{f(x)-f(k)\}\{f(x)+f(k)-4\}$이므로 두 방정식 중 하나와 동치입니다. 전개한 다항식을 미분하면

$$H'(x)=4(x-2)\{(x-2)^2-3\}.$$

세 경계는 $2-\sqrt{3}, 2, 2+\sqrt{3}$이고 부호는 왼쪽부터 $-,+,-,+$입니다. 따라서 감소 구간은 $(-\infty, 2-\sqrt{3}]$, $[2, 2+\sqrt{3}]$이고 증가 구간은 $[2-\sqrt{3}, 2]$, $[2+\sqrt{3}, \infty)$입니다. 극댓값은 $H(2)=5$, 극솟값은 $H(2\pm\sqrt{3})=-4$입니다.

정답·부분점수

극댓값5, 극솟값−4; 경계 $2-\sqrt{3}, 2, 2+\sqrt{3}$

인수분해60점 · 미분60점 · 증감·극값90점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

B1-2 · (3) 상세해설

첫 판단과 이유

실근 중 x≥0만 세므로 제곱방정식의 두 해가 항상 모두 허용되지 않습니다. 음의 해가 사라지는 경계도 확인합니다.

풀이

$t=(k-2)^2\ge 0$라 놓으면 두 방정식은 $(x-2)^2=t$와 $(x-2)^2=6-t$입니다. $x\ge 0$에서 $(x-2)^2=y$의 서로 다른 해의 개수는

$$w(y)=\begin{cases}0 & y<0,\\ 1 & y=0,\\ 2 & 0<y\le 4,\\ 1 & y>4.\end{cases}$$

특히 y=4에서는 x=0,4가 모두 허용됩니다. $t=3$이면 두 방정식이 같으므로 전체 해는2개이고, 그 외에는 겹치지 않습니다. 네 해를 얻으려면

$$0<t\le 4,\quad 0<6-t\le 4,\quad t\ne 3$$

이어야 하므로 $2\le t\le 4, t\ne 3$입니다. 따라서

$$k\in[0,2-\sqrt{2}]\ \cup\ [2+\sqrt{2},4],\qquad k\ne 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}.$$

경계 $k=0,2\pm\sqrt{2},4$에서는 t가2 또는4가 되어 네 해가 모두 허용되므로 포함합니다. 예를 들어 k=0에서 네 해는 $0,4,2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}$입니다. 최댓값은4입니다.

정답·부분점수

$N_{\max}=4$, $k\in[0,2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2},4]$, $k\ne 2\pm\sqrt{3}$

제한한 제곱방정식80점 · 중복40점 · t의 범위70점 · k의 범위50점 · 양끝·실제 존재30점. BlueMath 학습용 채점 기준입니다.

감점 요소

실수 전체에서의 근의 개수를 그대로 사용하면 t=2,4의 경계를 빠뜨립니다. t=3에서는 두 해집합이 같습니다.

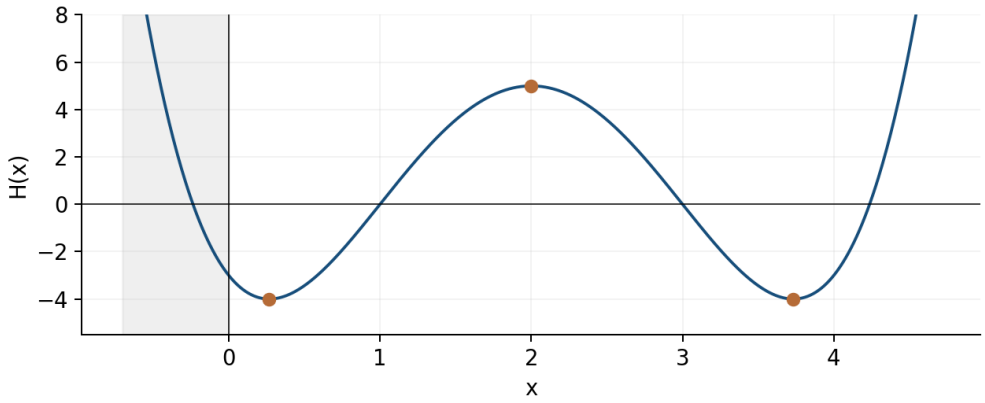
B1-2 · 모범답안과 복습

제출용 모범답안

(1) $f=(x-2)^2-1$, $H=(x-2)^4-6(x-2)^2+5$이다. (2) 차를 인수분해하면 두 방정식과 동치이다. $H'=4(x-2)\{(x-2)^2-3\}$의 부호는 $-,+,-,+$이므로 극대5, 극소−4이다. (3) x≥0에서 제곱방정식의 해가 둘이려면 우변이0보다 크고4 이하여야 한다. 두 우변은 t,6−t이므로 $2\le t\le 4, t\neq 3$이다. 이를 k로 옮기면 위 범위이며, x=0이 허용되어 양끝도 포함된다.

정당하게 줄이는 계산

해 네 개를 일일이 계산하기보다 제곱방정식의 우변과 x≥0의 관계를 표로 만들면 빠릅니다.



도함수의 부호가 바뀌는 세 점과 두 극솟값을 표시했습니다. 회색 부분은 마지막 소문항의 해를 세는 범위에서 제외됩니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규. 2027 모의 자연 I 문제2의 합성함수·해집합 구조를 유지하고 근을 세는 범위를 x≥0으로 변경. 연결: 기존 일반 업그레이드01 문제1 → A1-2.

내가 다시 쓸 근거