2027학년도 / 수리논술

경북대

자연 I

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BLUE MATH

경북대학교

최종점검3 제1회

문제편

자연계열 I 수학 영역 대비 · 자연계열 II 와 구분
수학 전용 2대문항 · 8소문항 · 자체 연습 배점 250점
출제 범위: 수학·수학 I ·수학 II ·미적분

이름 _____

각 결론에 이르는 이유와 과정을 함께 서술하십시오.
8소문항과 배점은 BlueMath 자체 연습 편성입니다.
교과목 통합 문항은 포함하지 않은 수학 전용 자료입니다.
대학이 발행하거나 승인한 시험지가 아닙니다.
시험일: 2026년11월28일 · 전체 고사시간100분
전체100분에는 교과목 통합도 포함됩니다. 수학전용 실측시간은 없습니다.
필기도구: 흑색 볼펜·만년필·연필 중 선택한 한 종류를 끝까지 사용.

최민구 T

문항 1

120점

음이 아닌 정수 n에 대하여 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$라 하자.

(1) I_0, I_1을 구하고 $I_n + I_{n+2} = 1/(n+1)$임을 보이시오. [20점]

(2) $S_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k/(2k+1)$이라 하자. $S_m - \pi/4$를 I_{2m+2}로 나타내고 그 부호와 극한을 설명하시오. [25점]

(3) $n \geq 0$에서 다음 부등식을 증명하시오. [40점]

$$0 \leq I_n - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+3)} \leq \frac{2}{(n+1)(n+3)(n+5)}.$$

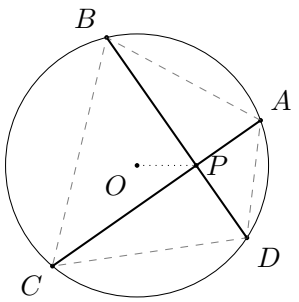
(4) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(I_n - \frac{1}{2(n+1)}\right)$과 $\lim_{m\to\infty}(m+1)|S_m - \pi/4|$를 구하시오. [35점]

문항 1 답안 작성

문항 2

130점

좌표평면의 원 $x^2+y^2=1$ 안에 점 $P=(r,0)$이 있고 $0<r<1$이다. $0\le\theta<\pi/2$에 대하여 P를 지나 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ인 직선을 ℓ이라 하고, P를 지나 ℓ에 수직인 직선을 m이라 하자. 두 직선이 원과 만나는 네 점을 원 둘레의 순서로 이어 만든 사각형의 넓이를 $S_r(\theta)$라 한다. 두 현의 중점을 각각 H, K라 한다.



개략도: AC와 BD는 직교하는 두 현이며, H, K는 각 현의 중점이다.

(1) H, K의 좌표를 구하고 $HK=r$임을 보이시오. [30점]

(2) 두 현의 길이를 각각 구하고 $S_r(\theta)^2=4(1-r^2)+r^4\sin^2(2\theta)$임을 보이시오. [35점]

(3) $S_r(\theta)$의 최솟값과 최댓값, 각각을 얻는 모든 θ를 구하시오. $r=\sqrt{3}/2$일 때 $S_r(\theta)=\sqrt{19}/4$을 만족시키는 모든 θ도 구하시오. [35점]

(4) $M(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} S_r(\theta)^2\,d\theta$라 하자. $M(r)=2$를 만족시키는 $r\in(0,1)$이 유일함을 보이고 그 값을 구하시오. 적분의 오른쪽 끝점에서는 연속적으로 연장한 값을 쓴다. [30점]

문항 2 답안 작성

BLUE MATH

경북대학교

최종점검3 제1회

상세해설편

자연계열 I 수학 영역 대비 · 자연계열 II 와 구분
수학 전용 2대문항 · 8소문항 · 자체 연습 배점 250점
출제 범위: 수학·수학 I ·수학 II ·미적분

이름 _____

각 결론에 이르는 이유와 과정을 함께 서술하십시오.
8소문항과 배점은 BlueMath 자체 연습 편성입니다.
교과목 통합 문항은 포함하지 않은 수학 전용 자료입니다.
대학이 발행하거나 승인한 시험지가 아닙니다.
시험일: 2026년11월28일 · 전체 고사시간100분
전체100분에는 교과목 통합도 포함됩니다. 수학전용 실측시간은 없습니다.
필기도구: 흑색 볼펜·만년필·연필 중 선택한 한 종류를 끝까지 사용.

최민구 T

문항 1 두 칸 차이의 적분에서 교대합의 오차로

120점

1 분모와 분자의 관계를 먼저 씁니다

$x=\tan t$로 치환하면 $x=0,1$은 각각 $t=0,\pi/4$에 대응하므로 $I_0=\pi/4$입니다. $1+x^2$의 도함수가 $2x$이므로 $I_1=\frac{1}{2}\ln 2$입니다. 또한

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}.$$

2 유한하게 더하면 중간 적분이 소거됩니다

$n=2k$인 식에 $(-1)^k$를 곱해 $k=0$부터 m까지 더하면 중간의 모든 적분이 상쇄되어

$$S_m=I_0+(-1)^m I_{2m+2},\qquad S_m-\frac{\pi}{4}=(-1)^m I_{2m+2}.$$

$I_{2m+2}>0$이므로 짝수 m에서는 과대, 홀수 m에서는 과소입니다. $0<I_{2m+2}\le\int_0^1 x^{2m+2}\,dx=1/(2m+3)$이므로 오차는 0으로 수렴합니다. 무한급수를 먼저 다루지 않고 유한합의 정확한 오차를 구한 것입니다.

3 두 항을 뺀 나머지를 양수인 적분으로 나타냅니다

통분하여 다음 항등식을 확인할 수 있습니다.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4} + \frac{(1-x^2)^2}{4(1+x^2)}.$$

양변에 x^n을 곱해 적분합니다. 앞의 두 항의 적분은

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+3)}.$$

나머지 R_n의 피적분함수는 음이 아니고 $1+x^2 \ge 1$이므로

$$0 \le R_n \le \frac{1}{4}\int_0^1 x^n(1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+3} + \frac{1}{n+5}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+3)(n+5)}.$$

이것이 요구한 부등식입니다.

4 정확한 주항과 작은 나머지를 구별합니다

앞 결과에서 $n^2 R_n \to 0$이고

$$\frac{n^2}{2(n+1)(n+3)} \to \frac{1}{2}$$

이므로 첫 극한은 $\boxed{1/2}$입니다. 같은 부등식에서 $(n+1)I_n \to 1/2$도 얻습니다. 따라서

$$(m+1)|S_m - \pi/4| = \frac{m+1}{2m+3}\big((2m+3)I_{2m+2}\big) \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

마지막 식에서는 적분의 첨자가 $2m+2$이므로 정규화 인자가 $2m+3$임을 구별해야 합니다.

정답 및 채점 점검

(1) $I_0 = \pi/4$, $I_1 = (\ln 2)/2$; $I_n + I_{n+2} = 1/(n+1)$.

(2) $S_m - \pi/4 = (-1)^m I_{2m+2} \to 0$, 짝수에서 양수·홀수에서 음수.

(3) 나머지는 $\int_0^1 x^n(1-x^2)^2/[4(1+x^2)]dx$.

(4) $1/2$, $1/4$.

채점 기준

자체 120점. 소문항별 배점은 본문과 같으며 식의 도출·부등식 근거·경계와 극한의 정당화를 평가합니다. 무한합의 미분이나 적분과 극한의 교환을 근거 없이 사용하지 않습니다.

문항 2 직교하는 두 현이 만드는 사각형

130점

1 원의 중심에서 현에 내린 수선의 발을 구합니다

$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$라 쓰겠습니다. ℓ 위의 점은 $(r+tc, ts)$로 표현됩니다. 이 점까지의 원점 거리의 제곱은 $r^2+2rtc+t^2$이므로 $t=-rc$에서 가장 작습니다. 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로

$$H=(rs^2,\,-rcs).$$

m의 방향을 $(-s,c)$로 잡아 같은 계산을 하면

$$K=(rc^2,\,rcs).$$

따라서

$$HK^2=r^2\{(s^2-c^2)^2+4c^2s^2\}=r^2(c^2+s^2)^2=r^2.$$

$r>0$이므로 $HK=r$입니다. 이 계산은 수직일 때도 사용할 수 있으므로 $\theta=0$도 빠지지 않습니다.

2 두 현은 사각형의 수직인 대각선입니다

$OH^2=r^2s^2$, $OK^2=r^2c^2$입니다. 반지름이 1인 원에서 중심과 현 사이 거리가 d이면 현 길이는 피타고라스 정리에 의해 $2\sqrt{1-d^2}$입니다. 따라서 길이는 각각

$$L=2\sqrt{1-r^2s^2},\qquad N=2\sqrt{1-r^2c^2}.$$

P가 원의 내부에 있어 두 현은 각각의 내부에서 교차합니다. 네 끝점을 둘레 순서로 이으면 이 두 현이 사각형의 대각선입니다. 교점에서 나눈 네 직각삼각형의 넓이를 더하면 $S_r=LN/2$입니다. 그러므로

$$S_r^2=4(1-r^2s^2)(1-r^2c^2)=4(1-r^2)+4r^4s^2c^2=4(1-r^2)+r^4\sin^2(2\theta).$$

3 각의 범위를 먼저 반영합니다

$0 \le 2\theta < \pi$이므로 $\sin^2(2\theta)$의 최솟값은 0이며 이 구간에서는 $\theta = 0$에서만 얻습니다. 최댓값 1은 $\theta = \pi/4$에서만 얻습니다. 따라서

$$\min S_r = 2\sqrt{1-r^2}, \quad \max S_r = \sqrt{4(1-r^2)+r^4} = 2 - r^2.$$

마지막 등호에서는 $0 < r < 1$이므로 $2 - r^2 > 0$임을 사용했습니다. $r = \sqrt{3}/2$이면

$$S_r^2 = 1 + \frac{9}{16}\sin^2(2\theta).$$

주어진 넓이의 제곱 $19/16$을 대입하면 $\sin^2(2\theta) = 1/3$입니다. α를 $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$을 만족하는 유일한 $\alpha \in (0, \pi/2)$라 하면 두 해는 $\boxed{\theta = \alpha/2,\ (\pi-\alpha)/2}$입니다. 역삼각함수 표기를 도입할 필요는 없습니다.

4 평균 제곱넓이는 한 변수의 다항식입니다

$\sin^2(2\theta) = (1 - \cos 4\theta)/2$이므로 해당 구간의 적분 평균은 $1/2$입니다. 따라서

$$M(r) = 4 - 4r^2 + \frac{r^4}{2}.$$

$z = r^2 \in (0, 1)$라 놓으면 $M(r) = 2$는 $z^2 - 8z + 4 = 0$입니다. 두 근은 $4 \pm 2\sqrt{3}$이며 $0 < 4 - 2\sqrt{3} < 1$, $4 + 2\sqrt{3} > 1$입니다. 따라서 가능한 값은 하나이고

$$\boxed{r = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}.$$

$M'(r) = -8r + 2r^3 < 0$이라는 증감으로도 유일성을 확인할 수 있습니다.

정답 및 채점 점검

(1) $H = (r\sin^2\theta, -r\sin\theta\cos\theta)$.

$K = (r\cos^2\theta, r\sin\theta\cos\theta)$, $HK = r$.

(2) $2\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}$, $2\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$; 제시한 식.

(3) 최소 $2\sqrt{1-r^2}$인 각 0, 최대 $2-r^2$인 각 $\pi/4$; $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, $0<\alpha<\pi/2$일 때 $\alpha/2, (\pi-\alpha)/2$.

(4) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

채점 기준

자체 130점. 소문항별 배점은 본문과 같으며 식의 도출·부등식 근거·경계와 극한의 정당화를 평가합니다. 무한합의 미분이나 적분과 극한의 교환을 근거 없이 사용하지 않습니다.