2027학년도 / 수리논술

경북대

자연 II (의·치·수의)

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BLUE MATH

경북대학교

최종점검3 제3회

문제편

자연계열 II 수학 영역 대비 · 자연계열 I 와 구분
수학 전용 2대문항 · 8소문항 · 자체 연습 배점 250점
출제 범위: 수학·수학 I ·수학 II ·미적분

이름 _____

각 결론에 이르는 이유와 과정을 함께 서술하십시오.
8소문항과 배점은 BlueMath 자체 연습 편성입니다.
의학논술 문항은 포함하지 않은 수학 전용 자료입니다.
대학이 발행하거나 승인한 시험지가 아닙니다.
시험일: 2026년11월28일 · 전체 고사시간100분
전체100분에는 의학논술도 포함됩니다. 수학전용 실측시간은 없습니다.
필기도구: 흑색 볼펜·만년필·연필 중 선택한 한 종류를 끝까지 사용.

최민구 T

문항 1

120점

음이 아닌 정수 n에 대하여

$$I_n = \int_0^1 e^t(1-t)^n\,dt, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

이라 하자. $0! = 1$이고 필요한 경우 $2 < e < 3$을 사용할 수 있다.

(1) I_0을 구하고 $n \geq 1$에서 $I_n = nI_{n-1} - 1$임을 보이시오. [25점]

(2) $e - S_n = I_n/n!$을 증명하고, $0 < I_n < e/(n+1)$임을 보여 $S_n \to e$를 설명하시오. [25점]

(3) e가 유리수라고 가정하면 (2)에서 모순이 생김을 보여 e가 무리수임을 증명하시오. [35점]

(4) $0 \leq t \leq 1$에서 $e^t \leq 1 + (e-1)t$를 먼저 보인 뒤

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{e-1}{(n+1)(n+2)}$$

임을 증명하고 $\lim_{n\to\infty}(n+1)n!(e-S_n)$을 구하시오. [35점]

문항 1 답안 작성

문항 2

130점

$a > 0$에 대하여

$$I(a) = \int_0^1 e^{ax}dx, \quad J(a) = \int_0^1 xe^{ax}dx, \quad K(a) = \int_0^1 x^2e^{ax}dx, \quad M(a) = \frac{J(a)}{I(a)}$$

라 하자. 필요한 경우 $e > 8/3$을 사용할 수 있다.

(1) $I(a), J(a), M(a)$를 적분 기호 없이 나타내시오. [30점]

(2) $I'(a) = J(a)$, $J'(a) = K(a)$임을 (1)의 식 및 부분적분으로 확인하시오. 이어 $I(a)K(a) - J(a)^2 > 0$을 $\int_0^1 (x - M(a))^2 e^{ax}dx$를 이용하여 증명하시오. [35점]

(3) M이 엄격히 증가함을 보이고 $a \to 0+$, $a \to \infty$에서의 극한을 구하여 M의 값의 범위를 정하시오. [30점]

(4) $M(a) = 3/4$를 만족시키는 $a > 0$이 유일함을 보이고, 그 값이 $3 < a < 4$에 있음을 증명하시오. 이 해가 만족시키는 e^a와 a의 등식도 구하시오. [35점]

문항 2 답안 작성

BLUE MATH

경북대학교

최종점검3 제3회

상세해설편

자연계열 II 수학 영역 대비 · 자연계열 I 와 구분
수학 전용 2대문항 · 8소문항 · 자체 연습 배점 250점
출제 범위: 수학·수학 I ·수학 II ·미적분

이름 _____

각 결론에 이르는 이유와 과정을 함께 서술하십시오.
8소문항과 배점은 BlueMath 자체 연습 편성입니다.
의학논술 문항은 포함하지 않은 수학 전용 자료입니다.
대학이 발행하거나 승인한 시험지가 아닙니다.
시험일: 2026년11월28일 · 전체 고사시간100분
전체100분에는 의학논술도 포함됩니다. 수학전용 실측시간은 없습니다.
필기도구: 흑색 볼펜·만년필·연필 중 선택한 한 종류를 끝까지 사용.

최민구 T

문항 1 부분적분으로 남겨 둔 지수함수의 나머지

120점

1 경계항을 빠뜨리지 않고 부분적분합니다

$I_0 = e - 1$입니다. $n \geq 1$에서 $(1-t)^n$을 미분하고 e^t를 적분하면

$$I_n = [e^t(1-t)^n]_0^1 + n\int_0^1 e^t(1-t)^{n-1}dt = -1 + nI_{n-1}.$$

$t = 0$에서의 경계항이 -1이며, $t = 1$에서는 $n \geq 1$이므로 0입니다.

2 유한한 부분적분의 결과로 정확한 오차를 구합니다

점화식을 $n!$로 나누면 $I_n/n! = I_{n-1}/(n-1)! - 1/n!$입니다. 반복하여

$$\frac{I_n}{n!} = I_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = e - S_n.$$

$n = 0$에서도 성립합니다. $0 \leq t < 1$에서 피적분함수가 양수이므로 $I_n > 0$입니다. 또한 $e^t < e$인 구간이 있으므로

$$I_n < e\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{e}{n+1}.$$

따라서 $0 < e - S_n < e/((n+1)n!) \to 0$이고 $S_n \to e$입니다. 무한급수 전개를 가정하여 시작한 것이 아니라 유한합과 적분의 등식에서 수렴을 도출했습니다.

3 양의 정수가 1보다 작아지는 모순을 만듭니다

$e = p/q$ (p, q는 양의 정수)라고 가정합니다. $n \geq \max(q, 3)$인 정수를 택하면 q는 $n!$의 약수이므로 $n!e$는 정수입니다. 또한 $0 \leq k \leq n$일 때 $n!/k!$는 정수이므로 $n!S_n$도 정수입니다. 따라서

$$I_n = n!e - n!S_n$$

은 정수입니다. 그런데 (2)와 $e < 3$, $n \geq 3$에서 $0 < I_n < e/(n+1) < 1$입니다. 0과 1 사이에 정수는 없으므로 모순입니다. 따라서 $\boxed{e\text{는 무리수}}$입니다.

4 직선으로 누른 피적분함수로 더 정밀하게 비교합니다

$H(t) = 1 + (e-1)t - e^t$라 놓으면 $H(0) = H(1) = 0$, $H'(t) = e - 1 - e^t$입니다. $2 < e < 3$에서 $1 < e-1 < e$이므로 H'는 구간 안에서 한 번 양수에서 음수로 바뀝니다. 따라서 H는 처음 증가한 뒤 감소하여 양 끝에서 0이고, 구간 전체에서 $H \geq 0$입니다. 즉 $1 \leq e^t \leq 1 + (e-1)t$입니다. $(1-t)^n$을 곱하여 적분하면

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} + (e-1)\int_0^1 t(1-t)^n dt.$$

$u = 1 - t$로 바꾸면 마지막 적분은 $1/(n+1) - 1/(n+2) = 1/[(n+1)(n+2)]$입니다. 그러므로 제시된 경계를 얻습니다. $(n+1)$을 곱하면

$$1 \leq (n+1)I_n \leq 1 + \frac{e-1}{n+2}$$

이므로 $(n+1)I_n \to 1$입니다. (2)의 등식에 따라 최종 극한은 $\boxed{1}$입니다.

정답 및 채점 점검

(1) $I_0 = e - 1$, $I_n = nI_{n-1} - 1$. (2) $e - S_n = I_n/n!$, $0 < I_n < e/(n+1)$, $S_n \to e$. (3) 유리수 가정 시 $0 < I_n < 1$인 정수가 생겨 모순. (4) 제시된 양쪽 경계, 극한 1.

채점 기준

자체 120점. 소문항별 배점은 문제에 명시했습니다. 정의역·끝점·등호·해의 중복·극한의 정당화를 포함해 평가합니다. 테일러 전개, 로피탈 정리, 적분과 미분의 무근거 교환은 사용하지 않습니다.

문항 2 지수함수로 가중한 평균의 변화

130점

1 기본 적분과 부분적분으로 식을 구합니다

$a>0$이므로

$$I(a)=\frac{e^a-1}{a}.$$

부분적분하면 $aJ(a)=e^a-I(a)$이므로

$$\boxed{J(a)=\frac{(a-1)e^a+1}{a^2},\qquad M(a)=\frac{e^a}{e^a-1}-\frac{1}{a}}.$$

$I(a)>0$이므로 모든 비가 잘 정의됩니다.

2 적분기호 안을 곧바로 미분하지 않고 확인합니다

I의 명시적인 식을 미분하면 $I'(a)=\{(a-1)e^a+1\}/a^2=J(a)$입니다. $aJ=e^a-I$를 미분하면 $J+aJ'=e^a-J$이므로 $aJ'=e^a-2J$입니다. 한편 부분적분에서 $aK=e^a-2J$이므로 $J'=K$입니다. 이 과정에서는 적분과 미분의 교환을 별도로 가정하지 않았습니다. $m=M(a)=J/I$로 잠시 쓰면

$$\int_0^1 (x-m)^2e^{ax}dx=K-2mJ+m^2I=K-\frac{J^2}{I}.$$

피적분함수는 음이 아니고 $x=m$이라는 한 점 이외에서 양수이므로 적분은 엄격히 양수입니다. $I>0$을 곱하여 $\boxed{IK-J^2>0}$을 얻습니다.

3 도함수의 분자가 제곱적분과 같습니다

몫을 미분하면

$$M'(a) = \frac{J'I - JI'}{I^2} = \frac{KI - J^2}{I^2} > 0.$$

따라서 엄격히 증가합니다. $a \to 0+$일 때 $0 \le x \le 1$에서 $1 \le e^{ax} \le e^a$이므로 $1 \le I \le e^a$, $1/2 \le J \le e^a/2$입니다. 따라서 $e^{-a}/2 \le M(a) \le e^a/2$에서 극한은 $1/2$입니다. $a \to \infty$에서는 (1)의 명시적인 식으로 $M(a) \to 1$입니다. M은 연속이고 엄격히 증가하므로 값의 범위는 정확히

$$\boxed{\frac{1}{2} < M(a) < 1}.$$

끝값은 유한한 양수 a에서 얻지 않습니다.

4 존재·유일성과 수치 구간을 따로 확인합니다

$3/4$은 (3)의 값의 범위 안에 있으므로 연속성과 사잇값정리로 해가 존재하고, 엄격한 증가로 유일합니다. $a = 3$에서는

$$M(3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{e^3 - 1} < \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

입니다. 실제로 $e > 8/3$이면 $e^3 > 512/27 > 13$이므로 위 부등식이 성립합니다. $a = 4$에서는 $M(4) = 3/4 + 1/(e^4 - 1) > 3/4$입니다. 따라서 유일한 해는 $3 < a < 4$입니다. $M(a) = 3/4$를 정리하면 $(a-4)e^a + 3a + 4 = 0$이며, 찾은 해에서는 $a < 4$이므로

$$\boxed{e^a = \frac{3a+4}{4-a}}.$$

$a = 0$은 원래 정의역에 없으므로 이 등식을 변형하는 과정에서 $a = 0$을 추가 해로 세지 않습니다.

정답 및 채점 점검

(1) $I=(e^a-1)/a$, $J=((a-1)e^a+1)/a^2$, $M=e^a/(e^a-1)-1/a$. (2) $I'=J$, $J'=K$, $IK-J^2>0$. (3) 엄격히 증가, 양 끝 극한 $1/2, 1$, 범위 $(1/2,1)$. (4) 해는 유일하고 $3<a<4$, $e^a=(3a+4)/(4-a)$.

채점 기준

자체 130점. 소문항별 배점은 문제에 명시했습니다. 정의역·끝점·등호·해의 중복·극한의 정당화를 포함해 평가합니다. 테일러 전개, 로피탈 정리, 적분과 미분의 무근거 교환은 사용하지 않습니다.