2027학년도 / 수리논술

부산대

자연

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

부산대학교

일반 자연계열 수리논술

UPGRADE 2 실전 1회

문제편

시간 100분 **배점** 100점

구성 3대문항 · 6소문항 (30점 / 35점 / 35점)

범위 수학 · 수학 I · 수학 II · 미적분

유형 유사 발상 · 구조 변형 · 신유형 예상의 독립 실전

연습 안내

조건을 식으로 옮기는 과정과 답을 얻는 근거를 함께 쓴다. 경우 분류에서는 경계값과 중복을, 최댓값·최솟값에서는 실제 달성 여부와 유일성을 확인한다. 계산기 없이 풀도록 구성하였다.

문항 배치는 최신 공개된 2026학년도 부산대 자연계열의 3대문항·각 2소문항 구조를 따른다. 이 구조와 세부 배점은 2027학년도 실제 시험의 확정 예고를 뜻하지 않는다. 시간과 범위는 2027학년도 대비 공식 가이드에서 확인하였다.

답안 작성

각 문항 뒤의 답안 연습면에 소문항 번호를 쓰고 풀이한다. 문제편 마지막 장에 빠른 정답이 있으므로 100분 연습 중에는 가려 둔다.

이름 _____ 날짜 _____

시작 _____ 종료 _____ 점수 _____/100

공식 기출·모의 원문이 아닌 교육용 창작 실전이다. 대학이 출제를 보증하거나 승인한 자료가 아니다. 기존 UPGRADE 1·추석·교정 변형본과 별개의 신규 문항으로 구성하였다.

문항 1

격자 경로의 대응과 되돌아오는 횟수 **[30점]**

제시문

서로 다른 N개 중 r개를 고르는 방법의 수는 ${}_N\mathrm{C}_r = \dfrac{N!}{r!(N-r)!}$이다. 두 집합 사이에 일대일대응이 존재하면 두 집합의 원소의 개수는 같다.

자연수 n에 대하여 오른쪽 또는 위쪽으로만 한 칸씩 움직여 $(0,0)$에서 (n,n)까지 가는 격자 경로 중 어느 점에서도 $y > x$가 되지 않는 경로의 수를 C_n이라 하자. $C_0 = 1$로 정한다. 이동 순서가 다르면 다른 경로이다.

[1-1] C_n을 조합의 수로 나타내고 C_4를 구하시오. **[10점]**

[1-2] $(0,0)$에서 $(5,5)$까지 가는 위 경로 중 출발점과 도착점을 제외하고 직선 $y = x$ 위의 격자점을 정확히 두 번 지나는 경로의 수를 구하시오. **[20점]**

결론만 쓰지 말고 필요한 식·분류·근거를 함께 제시하시오.

문항 1 답안 연습

문항 1의 두 소문항을 번호로 구분하여 작성한다. 이 연습면의 줄 간격은 대학 공식 답안지 규격이 아니다.

문항 2

접선의 개수와 같은 직선의 중복 **[35점]**

제시문

미분가능한 함수 f의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선은 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$이다. 이차방정식의 서로 다른 두 근을 u, v라 하면 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.

$f(x) = x^4 - 2x^2$이다. 점 $(0, b)$를 지나고 곡선 $y = f(x)$에 접하는 **서로 다른 직선**의 개수를 $N(b)$라 하자. 같은 직선이 두 점에서 접하면 한 개로 센다.

[2-1] $N(b)$를 모든 실수 b에 대하여 구하시오. **[15점]**

[2-2] $N(b) = 4$이고 네 접선의 기울기의 곱이 $\dfrac{3}{2}$일 때, b와 네 기울기의 제곱의 합을 구하시오. **[20점]**

결론만 쓰지 말고 필요한 식·분류·근거를 함께 제시하시오.

문항 2 답안 연습

문항 2의 두 소문항을 번호로 구분하여 작성한다. 이 연습면의 줄 간격은 대학 공식 답안지 규격이 아니다.

문항 3

절댓값 넓이와 유한합의 최솟값 **[35점]**

제시문

연속함수의 정적분은 부호가 바뀌는 점에서 구간을 나누어 계산할 수 있다. 또한 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

실수 a에 대하여

$$F(a) = \int_0^1 |x^2 - a|\, dx$$

라 하자. 자연수 m에 대하여

$$S_m(a) = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} \left| \left(\frac{k}{2m}\right)^2 - a \right|$$

라 한다. 실수 a에 대한 $S_m(a)$의 최솟값을 L_m이라 하자.

[3-1] $F(a)$를 최소로 하는 a와 그 최솟값을 구하시오. **[10점]**

[3-2] $F(a)$의 최솟값을 B라 하자. $S_m(a)$를 최소로 하는 모든 실수 a와 L_m을 구하고, $\lim_{m\to\infty} m(L_m - B)$를 구하시오. **[25점]**

결론만 쓰지 말고 필요한 식·분류·근거를 함께 제시하시오.

문항 3 답안 연습

문항 3의 두 소문항을 번호로 구분하여 작성한다. 이 연습면의 줄 간격은 대학 공식 답안지 규격이 아니다.

빠른 정답

각 답은 문제의 정의역·범위를 전제로 한다. 풀이가 필요한 문항은 해설에서 존재·유일성까지 확인한다.

문항 1

[1-1] $C_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n$, $C_4 = 14$

[1-2] 9

문항 2

[2-1] $b < 0,\ b \neq -1$: 2개; $b = -1$: 1개; $b = 0$: 3개; $0 < b < \dfrac{1}{3}$: 4개; $b = \dfrac{1}{3}$: 2개; $b > \dfrac{1}{3}$: 0개

[2-2] $b = \dfrac{1}{8}$, 제곱의 합 $\dfrac{136}{27}$

문항 3

[3-1] $a = \dfrac{1}{4}$, 최솟값 $\dfrac{1}{4}$

[3-2] $\dfrac{1}{4} \le a \le \dfrac{(m+1)^2}{4m^2}$; $L_m = \dfrac{2m+1}{8m}$; 극한 $\dfrac{1}{8}$

부산대학교

일반 자연계열 수리논술

UPGRADE 2 실전 1회

상세 해설·모범답안

시간 100분 **배점** 100점

구성 3대문항 · 6소문항 (30점 / 35점 / 35점)

범위 수학 · 수학 I · 수학 II · 미적분

유형 유사 발상 · 구조 변형 · 신유형 예상의 독립 실전

연습 안내

조건을 식으로 옮기는 과정과 답을 얻는 근거를 함께 쓴다. 경우 분류에서는 경계값과 중복을, 최댓값·최솟값에서는 실제 달성 여부와 유일성을 확인한다. 계산기 없이 풀도록 구성하였다.

문항 배치는 최신 공개된 2026학년도 부산대 자연계열의 3대문항·각 2소문항 구조를 따른다. 이 구조와 세부 배점은 2027학년도 실제 시험의 확정 예고를 뜻하지 않는다. 시간과 범위는 2027학년도 대비 공식 가이드에서 확인하였다.

해설 읽는 순서

빠른 정답 → 조건 해석과 단계별 풀이 → 제출형 모범답안 → 부분점수·감점 점검 순서로 확인한다. 제시한 채점표는 이 창작문항의 교육용 기준이다. 풀이가 다르더라도 타당한 논증이면 같은 핵심 성취에 해당하는 점수를 부여한다.

공식 기출·모의 원문이 아닌 교육용 창작 실전이다. 대학이 출제를 보증하거나 승인한 자료가 아니다. 기존 UPGRADE 1·추석·교정 변형본과 별개의 신규 문항으로 구성하였다.

빠른 정답

각 답은 문제의 정의역·범위를 전제로 한다. 풀이가 필요한 문항은 해설에서 존재·유일성까지 확인한다.

문항 1

[1-1] $C_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n$, $C_4 = 14$

[1-2] 9

문항 2

[2-1] $b < 0,\ b \neq -1$: 2개; $b = -1$: 1개; $b = 0$: 3개; $0 < b < \dfrac{1}{3}$: 4개; $b = \dfrac{1}{3}$: 2개; $b > \dfrac{1}{3}$: 0개

[2-2] $b = \dfrac{1}{8}$, 제곱의 합 $\dfrac{136}{27}$

문항 3

[3-1] $a = \dfrac{1}{4}$, 최솟값 $\dfrac{1}{4}$

[3-2] $\dfrac{1}{4} \le a \le \dfrac{(m+1)^2}{4m^2}$; $L_m = \dfrac{2m+1}{8m}$; 극한 $\dfrac{1}{8}$

문항 1 해설 1

격자 경로의 대응과 되돌아오는 횟수

조건과 첫 번째 물음

자연수 n에 대하여 오른쪽 또는 위쪽으로만 한 칸씩 움직여 $(0,0)$에서 (n,n)까지 가는 격자 경로 중 어느 점에서도 $y>x$가 되지 않는 경로의 수를 C_n이라 하자. $C_0=1$로 정한다. 이동 순서가 다르면 다른 경로이다.

[1-1] C_n을 조합의 수로 나타내고 C_4를 구하시오.

풀이의 방향

전체 경로를 세는 것은 쉽다. 어려운 것은 “대각선을 넘지 않는다”는 조건이다. 조건을 위반하는 경로에서 **처음 위반한 순간**을 잡으면, 위반 경로를 다른 끝점으로 가는 자유로운 경로와 대응시킬 수 있다. 두 번째 물음은 대각선에 돌아올 때마다 경로를 끊어 생각한다.

[1-1] 단계별 풀이

1. 전체 경로를 센다

오른쪽 이동을 E, 위쪽 이동을 N으로 적자. 전체 $2n$번 중 N의 위치 n개를 고르면 되므로 전체 경로는 ${}_{2n}\mathrm{C}_{n}$개이다.

2. 처음 대각선을 넘어간 구간을 바꾼다

조건을 위반하는 경로는 처음으로 $y=x+1$ 위의 점에 도달하는 순간이 있다. 그때까지의 E와 N을 모두 교환하고, 그 뒤의 이동은 그대로 둔다. 교환한 앞부분에서는 원래 N이 E보다 한 번 많았으므로, 바꾼 전체 경로는 E가 $n+1$번, N이 $n-1$번이다.

3. 역방향도 가능함을 확인한다

반대로 E가 $n+1$번, N이 $n-1$번인 경로는 끝에서 $x-y=2$이므로 처음 $x=y+1$에 도달하는 순간이 있다. 그때까지 E,N을 바꾸면 원래의 위반 경로가 된다. 두 조작은 서로 역인 대응이므로 두 경로 집합 사이에 일대일대응이 존재한다. 따라서 위반 경로는 ${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$개이다. 따라서

$$C_n={}_{2n}\mathrm{C}_{n}-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}=\frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_{n}.$$

$n=4$를 대입하면 $C_4=70-56=\boxed{14}$이다. 알려진 경로 수 공식을 외워 쓰는 대신, 뺀 수가 무엇인지 설명하는 것이 이 물음의 핵심이다.

문항 1 해설 2

[1-2] $(0,0)$에서 $(5,5)$까지 가는 위 경로 중 출발점과 도착점을 제외하고 직선 $y=x$ 위의 격자점을 정확히 두 번 지나는 경로의 수를 구하시오.

단계별 풀이

1. 대각선 사이의 구간을 세 개로 나눈다

내부에서 대각선을 정확히 두 번 만나면, 전체 경로는 **양 끝만 대각선 위에 있고 내부에서는 만나지 않는 구간 세 개**로 유일하게 나뉜다. 각 구간의 가로 이동 수를 r_1, r_2, r_3라 하면

$$r_1, r_2, r_3 \geq 1, \qquad r_1 + r_2 + r_3 = 5.$$

2. 한 구간의 개수를 구한다

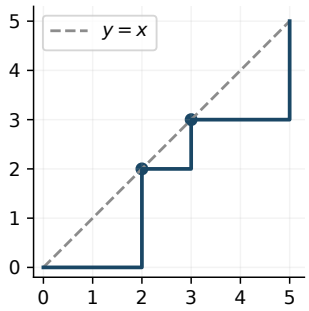
가로·세로 이동이 각각 r번인 한 구간은 반드시 E로 시작하고 N으로 끝난다. 이 두 이동을 지우고 남은 부분의 시작점을 원점으로 옮기면, 대각선을 넘지 않는 크기 $r-1$의 경로가 된다. 반대로 그러한 경로 앞뒤에 E, N을 붙이면 원래 구간을 얻는다. 따라서 한 구간의 수는 C_{r-1}이다.

3. 가능한 길이의 조합을 빠짐없이 나눈다

양의 정수 세 개의 합이 5이므로 순서를 제외한 형태는 다음 둘뿐이다.

(r_1, r_2, r_3)의 형태	서로 다른 순서	각 순서의 수	합계
$(3,1,1)$	3	$C_2 C_0 C_0 = 2$	6
$(2,2,1)$	3	$C_1 C_1 C_0 = 1$	3

그러므로 원하는 수는 $\boxed{6+3=9}$이다. 대각선에 한 번 더 닿는 구간을 넣지 않았으므로 “정확히 두 번”이라는 조건도 만족한다.



조건을 만족하는 한 경로. 내부 대각선 방문점은 $(2,2), (3,3)$ 두 개이다.

문항 1 모범답안·채점

제출형 모범답안

[1-1] 전체 경로 수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다. 위반 경로의 첫 $y=x+1$ 도달점까지 E,N을 교환하면 $(n+1,n-1)$로 가는 경로와 일대일대응한다. 역변환은 첫 $x=y+1$ 도달점까지 교환하는 것이다. 따라서 $C_n={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$이고 $C_4=14$이다.

[1-2] 대각선 사이의 세 구간의 가로 길이를 r_1,r_2,r_3라 하면 $r_1+r_2+r_3=5$, $r_i\ge 1$이다. 내부에서 대각선을 만나지 않는 크기 r의 구간은 첫 E와 마지막 N을 지워 크기 $r-1$ 경로와 대응하므로 C_{r-1}개이다. 가능한 길이는 $(3,1,1)$의 세 순서와 $(2,2,1)$의 세 순서이다. 따라서 $3C_2C_0^2+3C_1^2C_0=6+3=9$이다.

부분점수 기준

소문항	점수	확인할 논증
[1-1]	2	전체 경로를 조합으로 계산
	4	첫 위반점을 이용한 대응 구성
	2	역대응과 일대일대응 설명
	2	차와 C_4 계산
[1-2]	4	세 구간과 양의 정수 합 조건
	6	한 구간의 수 C_{r-1} 증명
	6	두 길이 형태와 순서·곱 계산
	4	합 9와 정확히 두 번 조건 확인

감점·오답 점검

대각선에 닿는 것은 허용된다. 금지된 것은 $y>x$이다. 첫 위반점 없이 임의의 구간을 뒤집으면 대응이 되지 않을 수 있다. 두 번째 물음에서 세 구간의 순서를 하나로 보면 3배를 빠뜨린다. 정답만 제시한 경우 대응·분류에 배정된 점수는 주지 않는다.핵심 근거를 생략하면 위 기준의 해당 점수를 부여하지 않는다. 단순 계산 실수는 후속 논증이 독립적으로 타당한 부분까지 중복 감점하지 않는다. 다른 올바른 풀이도 동등하게 평가한다.

설계 구분: 유사 발상·구조 변형. 참고 발상과 새 구성의 구별은 교사용 출처·검증표에 기록하였다.

문항 2 해설 1

접선의 개수와 같은 직선의 중복

조건과 첫 번째 물음

$f(x)=x^4-2x^2$이다. 점 $(0,b)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 **서로 다른 직선**의 개수를 $N(b)$라 하자. 같은 직선이 두 점에서 접하면 한 개로 센다.

[2-1] $N(b)$를 모든 실수 b에 대하여 구하시오.

풀이의 방향

접점의 x좌표를 t라고 놓으면 접선이 정해진다. 절편 조건에는 t^2만 나타나므로 $u=t^2\ge 0$로 바꾸어 근을 센다. 다만 **접점의 개수와 직선의 개수는 다를 수 있다**. 이 예외를 확인해야 첫 물음이 완성된다.

[2-1] 단계별 풀이

1. 절편 조건을 $u=t^2$에 대한 식으로 바꾼다

$$f'(t)=4t(t^2-1),\qquad y=4t(t^2-1)x+2t^2-3t^4.$$

따라서 $u=t^2\ge 0$에 대하여

$$b=2u-3u^2=\frac{1}{3}-3\left(u-\frac{1}{3}\right)^2.$$

$b<0$이면 양의 u가 한 개, $b=0$이면 $u=0,\dfrac{2}{3}$, $0<b<\dfrac{1}{3}$이면 양의 u가 두 개, $b=\dfrac{1}{3}$이면 $u=\dfrac{1}{3}$ 하나, $b>\dfrac{1}{3}$이면 없다. 양의 u 하나에서는 $t=\pm\sqrt{u}$ 두 접점이 나온다.

2. 같은 접선이 두 번 세어지는 경우를 찾는다

서로 다른 r,s에서 같은 직선 $y=mx+b$가 접하면, 최고차항이 1인 다항식 $f(x)-mx-b$는 두 중근을 가지므로

$$f(x)-mx-b=(x-r)^2(x-s)^2.$$

x^3의 계수가 0이므로 $s=-r$이다. 이때 우변은 짝함수이므로 $m=0$이며, x^2의 계수에서 $r^2=1$, 상수항에서 $b=-1$을 얻는다. 실제 $t=\pm1$의 접선은 모두 $y=-1$이다. 이 경우만 한 개를 빼면 된다.

$$N(b)=\begin{cases}2 & b<0,\ b\neq -1,\\ 1 & b=-1,\\ 3 & b=0,\\ 4 & 0<b<\dfrac{1}{3},\\ 2 & b=\dfrac{1}{3},\\ 0 & b>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

문항 2 해설 2

[2-2] $N(b)=4$이고 네 접선의 기울기의 곱이 $\dfrac{3}{2}$일 때, b와 네 기울기의 제곱의 합을 구하시오.

단계별 풀이

1. 네 기울기를 두 양의 근으로 묶는다

$N(b)=4$이므로 $0<b<\dfrac{1}{3}$이다. $3u^2-2u+b=0$의 두 근을 u, v라 하면

$$u+v=\frac{2}{3}, \qquad uv=\frac{b}{3}.$$

네 기울기는 $\pm 4\sqrt{u}(u-1)$, $\pm 4\sqrt{v}(v-1)$이다. 곱은

$$256uv\{(u-1)(v-1)\}^2 = 256\frac{b}{3}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{256b(b+1)^2}{27}.$$

2. b의 존재와 유일성을 함께 확인한다

$b=\dfrac{1}{8}$을 대입하면 위 곱은 $\dfrac{3}{2}$이다. 또한 $b>0$에서

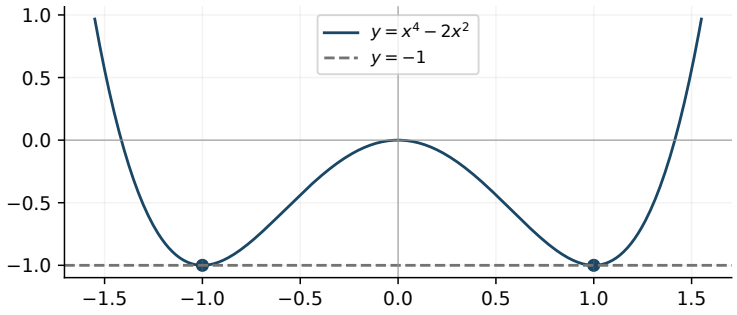
$$\{b(b+1)^2\}' = (b+1)(3b+1) > 0$$

이므로 다른 양의 해는 없다. $\dfrac{1}{8}$은 필요한 구간 $(0, \dfrac{1}{3})$에도 속한다.

3. 제곱의 합을 대칭식으로 계산한다

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} m_i^2 &= 32\{u(u-1)^2+v(v-1)^2\}\\ &= 32\{(u+v)^3-3uv(u+v)\\ &\qquad -2((u+v)^2-2uv)+(u+v)\}\\ &= 32\left(\frac{2}{27}+\frac{2b}{3}\right).\end{aligned}$$

따라서 $b=\dfrac{1}{8}$일 때 $\boxed{\sum m_i^2=\dfrac{136}{27}}$이다. 개별 접점을 근호로 모두 풀지 않아도 합과 곱만으로 계산할 수 있다.



$y=-1$은 서로 다른 두 점 $(-1,-1), (1,-1)$에서 접하지만 직선은 하나이다.

문항 2 모범답안·채점

제출형 모범답안

[2-1] 접선의 절편은 $b = 2t^2 - 3t^4$이다. $u = t^2 \ge 0$으로 두면 $b = \frac{1}{3} - 3(u - \frac{1}{3})^2$이므로 비음수 근의 개수와 $u = 0$ 여부로 접점 수를 센다. 동일한 접선이 $r \neq s$에서 접하면 $f(x) - mx - b = (x-r)^2(x-s)^2$이고 계수 비교로 $s = -r$, $m = 0$, $r^2 = 1$, $b = -1$이다. 따라서 $b = -1$에서만 접점 두 개가 직선 한 개이다. 결론은

$$N(b) = \begin{cases} 2 & b < 0,\ b \neq -1, \\ 1 & b = -1, \\ 3 & b = 0, \\ 4 & 0 < b < \dfrac{1}{3}, \\ 2 & b = \dfrac{1}{3}, \\ 0 & b > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

[2-2] 네 접선이 있으면 $0 < b < \frac{1}{3}$이고 $u+v = \frac{2}{3}$, $uv = \frac{b}{3}$이다. 기울기의 곱은 $\frac{256b(b+1)^2}{27}$이다. $b(b+1)^2$의 엄격한 증가와 대입으로 $b = \frac{1}{8}$을 얻는다. 제곱의 합은 $32\{u(u-1)^2 + v(v-1)^2\} = 32(\frac{2}{27} + \frac{2b}{3}) = \frac{136}{27}$이다.

부분점수 기준

소문항	점수	확인할 논증
[2-1]	3	접선과 절편식 도출
	4	$u \ge 0$의 근·영근 경우 분류
	5	두 접점이 같은 직선인 경우를 증명
	3	모든 경계를 포함한 $N(b)$ 정리
[2-2]	4	네 기울기와 근·계수 관계
	6	기울기 곱 식과 $b = \frac{1}{8}$
	4	단조성 및 허용범위로 유일성 확인
	6	제곱의 합 전개와 $\frac{136}{27}$

감점·오답 점검

$b = -1$에서 2개라고 쓰면 직선의 중복을 놓친 것이다. $b = 0$에서는 $t = 0$을 두 번 세지 않는다. $b = \frac{1}{3}$에서는 u가 중근이지만 접점 $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$은 서로 다르다. 정답 후보를 대입하는 것만으로 유일성을 증명한 것은 아니다.핵심 근거를 생략하면 위 기준의 해당 점수를 부여하지 않는다. 단순 계산 실수는 후속 논증이 독립적으로 타당한 부분까지 중복 감점하지 않는다. 다른 올바른 풀이도 동등하게 평가한다.

설계 구분: 변형·융합. 참고 발상과 새 구성의 구별은 교사용 출처·검증표에 기록하였다.

문항 3 해설 1

절댓값 넓이와 유한합의 최솟값

조건과 첫 번째 물음

실수 a에 대하여

$$F(a)=\int_0^1 |x^2-a|\,dx$$

라 하자. 자연수 m에 대하여

$$S_m(a)=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}\left|\left(\frac{k}{2m}\right)^2-a\right|$$

라 한다. 실수 a에 대한 $S_m(a)$의 최솟값을 L_m이라 하자.

[3-1] $F(a)$를 최소로 하는 a와 그 최솟값을 구하시오.

풀이의 방향

연속적인 넓이와 유한개의 절댓값 합은 비슷해 보여도 최소를 만드는 매개변수의 모양이 다르다. 넓이에서는 한 점이 정해지고, 항의 개수가 짝수인 합에서는 **두 가운데 값 사이의 닫힌구간 전체**가 최소를 만든다. 이 사실을 구간별 기울기로 직접 증명한다.

[3-1] 단계별 풀이

1. a의 범위를 나누어 절댓값을 없앤다

$a\le 0$에서는 $x^2-a\ge 0$이므로 $F(a)=\frac{1}{3}-a$이다. $a\ge 1$에서는 $x^2-a\le 0$이므로 $F(a)=a-\frac{1}{3}$이다. $0\le a\le 1$에서는 $x=\sqrt{a}$를 기준으로 부호가 바뀐다. 따라서

$$\begin{aligned}F(a)&=\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,dx+\int_{\sqrt{a}}^1(x^2-a)\,dx\\&=\frac{1}{3}-a+\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

2. 모든 범위에서 증가·감소를 확인한다

가운데 구간의 도함수는

$$F'(a)=-1+2\sqrt{a}.$$

이는 $a<\frac{1}{4}$에서 음수, $a>\frac{1}{4}$에서 양수이다. 바깥의 두 구간도 각각 감소·증가하므로 전 구간에서 유일한 최소점은 $a=\frac{1}{4}$이다.

$$F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{1}{4}}.$$

$0, 1$은 계산식이 바뀌는 경계일 뿐 최소점이 아니다. 가운데 구간만 계산하고 바깥을 생략하지 않는다.

문항 3 해설 2

[3-2] $F(a)$의 최솟값을 B라 하자. $S_m(a)$를 최소로 하는 모든 실수 a와 L_m을 구하고, $\lim_{m\to\infty} m(L_m - B)$를 구하시오.

단계별 풀이

1. 유한합의 기울기를 센다

$z_k = (\frac{k}{2m})^2$라 두면 $z_1 < \cdots < z_{2m}$이다. $z_j < a < z_{j+1}$에서 a보다 작은 값은 j개, 큰 값은 $2m-j$개이므로

$$S_m'(a) = \frac{j - (2m-j)}{2m} = \frac{j-m}{m}.$$

따라서 $j < m$이면 감소, $j = m$이면 일정, $j > m$이면 증가한다. 맨 바깥 구간의 기울기는 각각 $-1, 1$이며, 절댓값 합은 모든 점에서 연속이다. 그러므로 최소를 만드는 모든 a는

$$\boxed{z_m \le a \le z_{m+1}} = \boxed{\frac{1}{4} \le a \le \frac{(m+1)^2}{4m^2}}.$$

2. 최소구간에서 a항이 지워짐을 이용한다

이 구간에서는 아래쪽 m개 항과 위쪽 m개 항으로 나누어

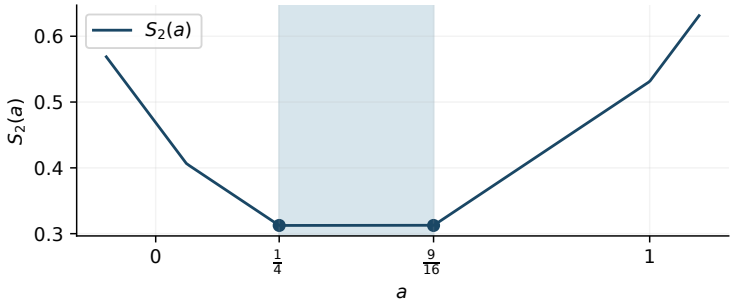
$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2m}\left\{\sum_{k=1}^{m}(a - z_k) + \sum_{k=m+1}^{2m}(z_k - a)\right\} \\ &= \frac{\sum_{k=m+1}^{2m} k^2 - \sum_{k=1}^{m} k^2}{8m^3}. \end{aligned}$$

분자는

$$\frac{2m(2m+1)(4m+1)}{6} - 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = m^2(2m+1).$$

따라서

$$L_m = \frac{2m+1}{8m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8m}, \qquad \boxed{\lim_{m\to\infty} m\left(L_m - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}}.$$



$m = 2$의 예. S_2는 $[\frac{1}{4}, \frac{9}{16}]$ 전체에서 같은 최솟값 $\frac{5}{16}$을 갖는다.

문항 3 모범답안·채점

제출형 모범답안

[3-1] 절댓값의 부호에 따라 $F(a)=\frac{1}{3}-a\ (a\le 0)$, $F(a)=\frac{1}{3}-a+\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}\ (0\le a\le 1)$, $F(a)=a-\frac{1}{3}\ (a\ge 1)$이다. 가운데 구간에서 $F'(a)=-1+2\sqrt{a}$이고 양 바깥 구간의 증감을 함께 보면 유일한 최소점은 $a=\frac{1}{4}$, 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

[3-2] $z_k=\left(\frac{k}{2m}\right)^2$라 하면 $z_j<a<z_{j+1}$에서 $S_m'(a)=\frac{j-m}{m}$이다. 연속성까지 고려하면 최소구간은 $[z_m,z_{m+1}]=[\frac{1}{4},\frac{(m+1)^2}{4m^2}]$이다. 그 구간에서는 a항이 상쇄되므로 $L_m=\frac{\sum_{k=m+1}^{2m}k^2-\sum_{k=1}^{m}k^2}{8m^3}=\frac{2m+1}{8m}$이다. 따라서 구하는 극한은 $\frac{1}{8}$이다.

부분점수 기준

소문항	점수	확인할 논증
[3-1]	4	a의 세 범위와 정적분 분할
	4	증감으로 유일한 최소점 확인
	2	최솟값 $\frac{1}{4}$
[3-2]	7	절댓값 합의 구간별 기울기
	6	모든 최소점 및 닫힌 끝점 제시
	8	제곱합으로 L_m 정확히 계산
	4	극한 $\frac{1}{8}$

감점·오답 점검

유한합의 최소점은 $a=\frac{1}{4}$ 하나가 아니다. 경계 z_m, z_{m+1}에서도 연속성 때문에 같은 최소값을 갖는다. $L_m\to\frac{1}{4}$만 보이면 마지막 물음의 정밀한 극한을 구할 수 없다. $\frac{1}{m}$의 차이까지 정확히 남겨야 한다.핵심 근거를 생략하면 위 기준의 해당 점수를 부여하지 않는다. 단순 계산 실수는 후속 논증이 독립적으로 타당한 부분까지 중복 감점하지 않는다. 다른 올바른 풀이도 동등하게 평가한다.

설계 구분: 신유형 예상. 참고 발상과 새 구성의 구별은 교사용 출처·검증표에 기록하였다.