2027학년도 / 수리논술

세종대

자연

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BlueMath 2027

세종대 자연계 · B1

문제편 · 전형 재현

시험 조건

서울캠퍼스 · 논술우수자 · 자연계열

수학·수학 I ·수학 II ·미적분 · 120분 · 3대문항·9소문항 · 800점

응시 기록

이름: _____

시작: _____ 종료: _____

답안 작성

소문항 번호를 맞추어 풀이와 이유를 서술합니다. 정답만 제시하지 말고 필요한 식·경우 분류·계산을 남기십시오. 연습 답안지3쪽은 별도 파일로 제공합니다.

시간 배분

읽기5분, 세 대문항에 각35분, 검토10분을 출발안으로 삼습니다. 공식 소문항별 제한시간은 없으며 자신의 강점에 맞게 조절합니다.

대문항 배점

260·270·270점입니다. A1은 올해 공식 모의 소문항 배점을 유지했습니다. 다른 회차의 세부 채점 항목은 BlueMath 연습용입니다.

최민구 T

BlueMath 연습자료 · 대학 공식 시험지가 아닙니다.

B1-1 · 문제 1 260점

양의 실수 a, t에 대하여 포물선 $y = ax^2 + t$가 직선 $y = 2x$에 점 P에서 접한다. 원 C는 P에서 이 직선에 접하며 중심 Q는 x축 위에 있다. 점 $M = (0, 1 - t)$에서 원에 그은 접선의 길이를 $\ell(t)$라 한다.

(1) 80점

a, P와 Q의 좌표, 원 C의 반지름을 t의 식으로 나타내시오.

(2) 90점

모든 $t > 0$에서 M이 원 밖에 있음을 보이고, $\ell(t)$의 최솟값과 그때의 t를 구하시오.

(3) 90점

P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PQH를 밑면으로 하며 x축에 수직인 단면이 정삼각형인 입체의 부피를 $V(t)$라 한다. 단면의 한 변은 밑면을 자른 선분이다. $V(t)$를 구하고, $\ell(t) \le 1$일 때 V의 최댓값을 구하시오.

B1-2 · 문제 2 270점

$f(u) = u^5 + u^3 + u$의 역함수를 g라 하자. 두 점 $P = (x, g(x))$, $Q = (x+6, g(x+6))$을 생각한다.

(1) **80점**

g가 실수 전체에서 존재함을 보이고 g', g''을 g의 식으로 나타내시오. 또한 g''의 부호를 조사하시오.

(2) **90점**

$\int_{-3}^{3} \{g(x)\}^2 dx$를 구하시오.

(3) **100점**

선분 PQ의 길이가 최대인 x와 그 최대 길이를 구하고, 최대 위치가 하나임을 보이시오.

B1-3 · 문제 3 270점

최고차항 계수가1인 삼차함수 f에 대하여 $g(x)=\begin{cases}x+2 & (x<0),\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$가 실수 전체에서 미분가능하다. f의 x^2 계수를 A라 한다.

(1) **80점**

f를 A의 식으로 나타내고 $g(2)-2g'(1)$을 구하시오.

(2) **90점**

모든 정수 k에 대하여 $g(k)g(k+1)\geq 0$이기 위한 A의 범위를 구하시오.

(3) **100점**

(2)의 조건에 더하여 어떤 정수 j에 대하여 $0\leq g(j+1)-g(j)\leq \frac{1}{3}$이다. 이때 $\int_0^1 g(x)dx$의 값의 범위를 구하시오.

B1-1 · 접선 길이의 조건과 입체의 부피

(1) 첫 판단과 이유

접선의 중근 조건으로 P를 정한 다음 수직인 반지름으로 Q를 구합니다.

풀이

접선 조건은 $ax^2-2x+t=0$이 중근을 갖는다는 뜻이다. 판별식에서 $4-4at=0$이므로 $a=\frac{1}{t}$이고, 접점은 $P=(t,2t)$이다. PQ는 접선에 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. $Q=(q,0)$를 대입하면 $\frac{2t}{t-q}=-\frac{1}{2}$에서 $q=5t$를 얻는다. 따라서 반지름은

$$PQ=\sqrt{(4t)^2+(2t)^2}=2\sqrt{5}t.$$

t가 양수이므로 중심과 반지름이 실제로 정해지며 원은 하나이다.

정답·부분점수

$a=\frac{1}{t}$, $P=(t,2t)$, $Q=(5t,0)$, 반지름 $2\sqrt{5}t$.

접점30점 · 중심30점 · 반지름20점. 학습용 채점 기준입니다.

(2) 첫 판단과 이유

원의 바깥에 있다는 조건을 먼저 검사합니다. 접선 길이의 제곱을 완전제곱식으로 정리하면 최소와 달성을 함께 알 수 있습니다.

풀이

중심까지의 거리 제곱에서 반지름 제곱을 빼면

$$MQ^2-PQ^2=25t^2+(1-t)^2-20t^2=6t^2-2t+1=6\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}>0.$$

따라서 모든 t에서 M은 원 밖에 있고 접선을 그을 수 있다. 접점까지의 반지름과 접선이 수직이므로 위의 식이 $\ell(t)^2$이다. 제곱항이0인 $t=\frac{1}{6}>0$에서만 최솟값을 갖는다. 그러므로 ℓ의 최솟값은 $\sqrt{\frac{5}{6}}$이다.

정답·부분점수

최솟값 $\sqrt{\frac{5}{6}}$, $t=\frac{1}{6}$.

거리 제곱·외부성40점 · 최소·등호50점. 학습용 채점 기준입니다.

B1-1 · (3) 상세해설

첫 판단과 이유

부피를 구하는 적분 구간과 접선 길이로 제한된 t의 구간을 구별합니다.

풀이

$H=(t,0)$이고 $Q=(5t,0)$이다. 직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{x}{2}+\frac{5t}{2}$이다. $t\le x\le 5t$에서 단면 한 변의 길이가 이 높이이므로

$$V(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{t}^{5t}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5t}{2}\right)^{2}dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}t^{3}.$$

한편 $\ell(t)\le 1$은 $6t^{2}-2t\le 0$과 같으므로 허용 범위는 $0<t\le\frac{1}{3}$이다. V는 이 구간에서 엄격히 증가하므로 $t=\frac{1}{3}$에서만 최댓값 $\frac{4\sqrt{3}}{81}$을 갖는다. $t=0$은 원래 조건에서 제외한다.

정답·부분점수

$V(t)=\frac{4\sqrt{3}}{3}t^{3}$, 조건 아래 최댓값 $\frac{4\sqrt{3}}{81}$ ($t=\frac{1}{3}$).

단면 적분40점 · t의 허용 구간20점 · 최대와 달성30점. 학습용 채점 기준입니다.

감점 요소

접선이 존재하는지를 확인하기 전에 길이의 제곱근을 쓰지 않습니다. 길이가 최소인 t와 제한 아래 부피가 최대인 t는 다릅니다.

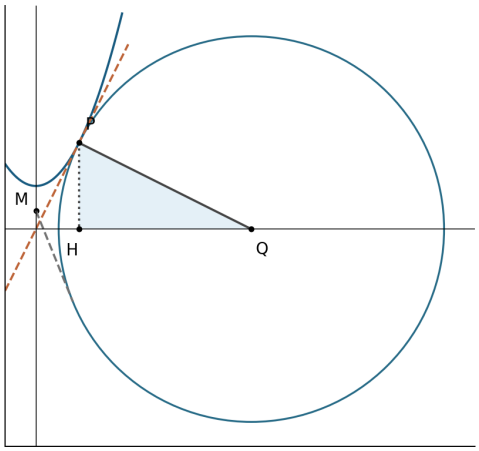
B1-1 · 모범답안과 복습

세 소문항의 연결을 보이는 모범답안

접선 조건에서 $a=\frac{1}{t}, P=(t,2t)$이고, 수직 관계에서 $Q=(5t,0), PQ=2\sqrt{5}t$이다. $\ell^2=6(t-\frac{1}{6})^2+\frac{5}{6}$이므로 접선은 항상 존재하고 최소는 $\sqrt{\frac{5}{6}}$이다. 단면을 적분하면 $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}t^3$이다. $\ell\le 1$에서 $0<t\le\frac{1}{3}$이고 V가 증가하므로 최대는 $\frac{4\sqrt{3}}{81}$이다.

정당하게 줄이는 계산

삼각형의 가로 길이4t와 최대 정삼각형 넓이를 곱한 뒤3으로 나누어도 됩니다. 이 비율은 일차식 제곱의 적분에서 나옵니다.



한 양의 t에서 실제 좌표로 그린 보조 그림입니다. 원의 중심 Q, 접점 P와 높이 PH, 세로 단면의 길이를 구별합니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-1

내 답안에서 다시 쓸 근거

B1-2 · 다항함수의 역함수와 가장 긴 선분

(1) 첫 판단과 이유

역함수의 존재에는 증가성과 치역을 모두 확인합니다.

풀이

$f'(u)=5u^4+3u^2+1>0$이고 $u\to\pm\infty$에서 $f(u)\to\pm\infty$이다. 따라서 f는 실수 전체를 치역으로 갖는 일대일함수이며 역함수 g가 존재한다. $f(g(x))=x$를 두 번 미분하면

$$g'(x)=\frac{1}{5g(x)^4+3g(x)^2+1},\quad g''(x)=-\frac{20g(x)^3+6g(x)}{\{5g(x)^4+3g(x)^2+1\}^3}.$$

g가 증가하고 $g(0)=0$이므로 이계도함수는 $x<0$에서 양수, $x=0$에서0, $x>0$에서 음수이다.

정답·부분점수

$g'=\frac{1}{5g^4+3g^2+1}$, $g''=-\frac{20g^3+6g}{(5g^4+3g^2+1)^3}$; x의 부호와 반대.

존재20점 · 도함수40점 · 부호20점. 학습용 채점 기준입니다.

(2) 첫 판단과 이유

역함수의 식을 구하지 않고 원래 함수의 변수로 적분합니다.

풀이

$f(-1)=-3, f(1)=3$이다. $x=f(u)$로 치환하면 $g(x)=u$이고 $dx=(5u^4+3u^2+1)du$이다. 그러므로

$$\int_{-3}^{3}g(x)^2dx=\int_{-1}^{1}(5u^6+3u^4+u^2)du=\frac{10}{7}+\frac{6}{5}+\frac{2}{3}=\frac{346}{105}.$$

짝함수이므로0부터1까지 적분한 값의 두 배로 계산할 수 있다.

정답·부분점수

$\frac{346}{105}$.

치환·양끝40점 · 적분50점. 학습용 채점 기준입니다.

B1-2 · (3) 상세해설

첫 판단과 이유

거리의 미분보다 양수인 세로 길이의 미분이 간단합니다.

풀이

$p=g(x), q=g(x+6)$라 하면 $q>p$이다. $PQ^2=36+(q-p)^2$이므로 양수 $\Delta=q-p$가 최대인 곳을 찾는다. 도함수의 분모는 양수이며 그 분자의 부호는

$$f'(p)-f'(q)=(p-q)(p+q)\{5(p^2+q^2)+3\}$$

의 부호와 같다. $p-q<0$이므로 Δ'의 부호는 $-(p+q)$와 같다. 합 $g(x)+g(x+6)$은 엄격히 증가하고, $x=-3$에서는 $p=-1, q=1$로 합이0이다. 따라서 그 전에는 거리가 증가하고 그 뒤에는 감소한다. 최대는 $x=-3$에서만 생기며 그 값은 $\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$이다.

정답·부분점수

$x=-3$, 최대 $2\sqrt{10}$.

거리와 세로 길이30점 · 부호·유일성50점 · 최대 길이20점. 학습용 채점 기준입니다.

감점 요소

대칭이라는 말만으로 최대를 단정하지 않습니다. 중심의 양쪽에서 도함수 부호가 바뀌는 근거가 필요합니다.

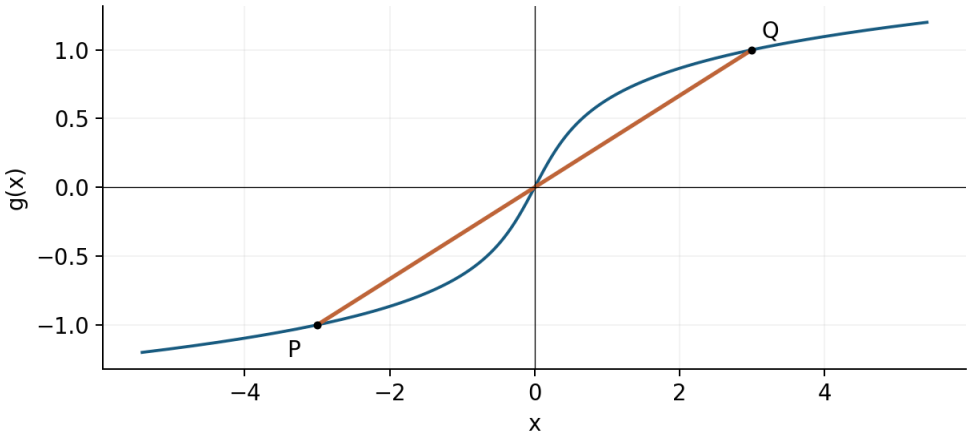
B1-2 · 모범답안과 복습

세 소문항의 연결을 보이는 모범답안

$f' > 0$이며 치역이 실수 전체이므로 g가 존재한다. 역함수 항등식의 미분으로 두 도함수를 얻는다. $x = f(u)$로 치환한 적분은 $\frac{346}{105}$이다. Δ'의 부호는 $-(g(x)+g(x+6))$이고 그 합은 $x=-3$에서만0이다. 따라서 거리의 유일한 최대는 $2\sqrt{10}$이다.

정당하게 줄이는 계산

도함수의 차는 p²−q²를 인수로 묶으면 부호를 바로 알 수 있습니다.



홀함수의 역함수도 홀함수입니다. 그림은 최대 선분의 두 끝점을 나타내며, 최대라는 결론은 전체 증감으로 증명합니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-2

내 답안에서 다시 쓸 근거

B1-3 · 정수에서의 부호와 작은 증가량

(1) 첫 판단과 이유

경계에서 두 계수를 먼저 확정합니다.

풀이

0에서 연속이고 좌우 미분계수가 같으므로 $f(0)=2, f'(0)=1$이다. 따라서 $f(x)=x^3+Ax^2+x+2$이다. $g(2)=12+4A$, $g'(1)=4+2A$이므로 두 값의 조합은 $12+4A-2(4+2A)=4$이다.

정답·부분점수

$f=x^3+Ax^2+x+2$, $g(2)-2g'(1)=4$.

두 계수40점 · 함수값·미분계수40점. 학습용 채점 기준입니다.

(2) 첫 판단과 이유

곱이0인 예외를 없애지 말고, 초기 두 정수와 이후의 일반 증가량을 구분합니다.

풀이

음의 정수에서 $g(k)=k+2$이고 부호가 바뀌는 사이에는 $g(-2)=0$이 있으므로 음의 정수 쪽의 곱 조건은 항상 성립한다. $g(0)=2>0$이므로 $k=0$에서 $f(1)=A+4\geq 0$이 필요하다.

$A=-4$이면 $f(2)=f(3)=-4, f(4)=6$이어서 k=3에서 실패한다. $A>-4$이면 $f(1)>0$이고 k=1에서 $f(2)=4A+12\geq 0$, 즉 $A\geq -3$이 필요하다.

역으로 $A\geq -3$이면 $f(1), f(2)\geq 0$이다. 정수 $j\geq 2$에서

$$f(j+1)-f(j)=3j^2+(3+2A)j+A+2\geq 3j^2-3j-1\geq 5.$$

마지막 식은 j≥2에서 증가한다. 따라서 이후 정수에서도 함수값이 모두 음수가 아니므로 곱 조건이 성립한다. 필요충분조건은 $A\geq -3$이다.

정답·부분점수

$A\geq -3$.

초기 조건·예외40점 · 충분성·전체 정수50점. 학습용 채점 기준입니다.

B1-3 · (3) 상세해설

첫 판단과 이유

작은 증가량이 가능한 j를 먼저 제한한 뒤 정적분 값을 일차식으로 옮깁니다.

풀이

j≤−1에서 증가량은1이므로 조건을 만족하지 않는다. (2)의 범위에서는 j≥2의 증가량이5 이상이므로 j=0,1만 남는다.

$$j=0:\quad 0\le A+2\le \frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad -2\le A\le -\frac{5}{3},$$
$$j=1:\quad 0\le 3A+8\le \frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad -\frac{8}{3}\le A\le -\frac{23}{9}.$$

두 구간 모두 A≥−3에 포함되고 각각 j=0 또는1을 실제로 택할 수 있어 충분하다. 한편

$$\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{4}+\frac{A}{3}+\frac{1}{2}+2=\frac{11}{4}+\frac{A}{3}.$$

A의 계수가 양수이므로 각 구간의 양끝을 대입하면 $[\frac{67}{36},\frac{205}{108}]\cup[\frac{25}{12},\frac{79}{36}]$이다. 네 끝값도 모두 포함한다.

정답·부분점수

$[\frac{67}{36},\frac{205}{108}]\cup[\frac{25}{12},\frac{79}{36}]$.

j의 분류30점 · A의 두 구간30점 · 적분·끝값40점. 학습용 채점 기준입니다.

감점 요소

A=−4일 때 f(1)=0이라는 이유로 다음 곱 검사를 생략하면 안 됩니다. 실수 전체 증가 조건은 주어지지 않았습니다.

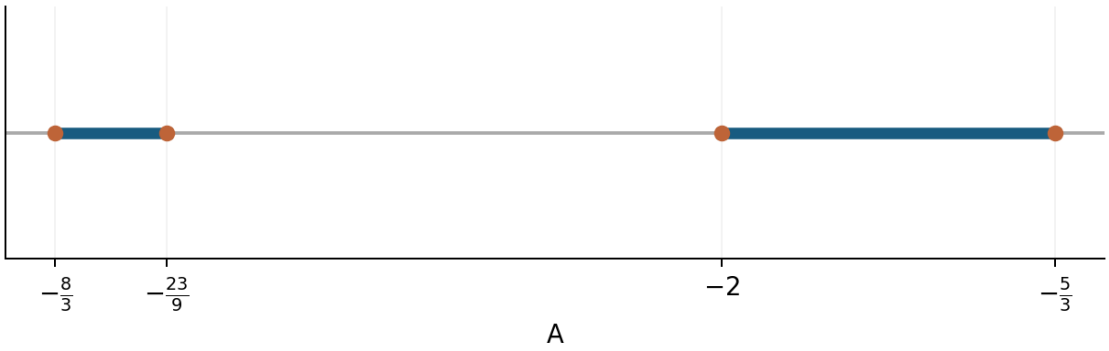
B1-3 · 모범답안과 복습

세 소문항의 연결을 보이는 모범답안

미분가능성으로 $f = x^3 + Ax^2 + x + 2$이며 요구된 값은4이다. 정수 곱 조건은 A=−4의 예외를 제외하고 초기 두 함수값과 이후 증가량으로 $A \geq -3$과 동치이다. 작은 증가량은 j=0,1에서만 가능하여 A의 두 닫힌구간을 얻는다. $\int_0^1 g = \frac{11}{4} + \frac{A}{3}$에 대입하면 두 정답 구간이 나온다.

정당하게 줄이는 계산

모든 정수의 함수값을 전개할 필요 없이 j≥2의 증가량이5 이상임을 보이면 됩니다.



두 정수 조건을 동시에 만족하는 A의 범위입니다. 각 끝점을 실제로 택할 수 있고 사이의 빈 구간은 허용되지 않습니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-3

내 답안에서 다시 쓸 근거