2027학년도 / 수리논술

세종대

자유전공

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제05회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BlueMath 2027

세종대 자유전공 수학 · B1

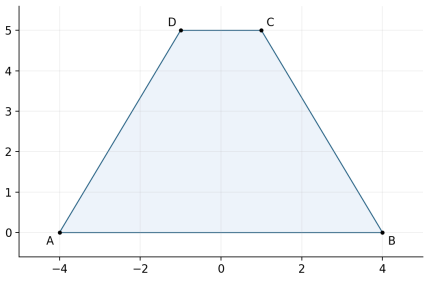
문제편 · 전형 재현

수학1대문항·3소문항·400점. 수학 연습시간60분은 편집 권장안이며, 공식120분은 인문·수학을 합친 전체 시간입니다.

자연수 $n \geq 1$에 대하여 사다리꼴 $ABCD$의 꼭짓점은

$$A(-2n, 0), \quad B(2n, 0), \quad C(1, 2n+1), \quad D(-1, 2n+1)$$

이다. 이 사다리꼴의 내부와 경계를 모두 포함하는 원의 반지름 중 최솟값을 $r(n)$이라 한다.



그림은 n=2인 경우입니다.

(1) **120점**

$\angle DAB = \alpha$라 할 때 $\sin\alpha$를 n의 식으로 나타내시오.

(2) **130점**

$r(n)$을 구하고 최소 원의 중심이 하나로 정해짐을 보이시오.

(3) **150점**

자연수 $d \geq 3$에 대하여

$$F(n) = (n+1)^2 r(n)^2, \quad G_d(n) = \frac{20+8d}{3}n^3 + (d+6)n^2 + (2-d)n$$

라 하자. 수열 $a_n = F(n) - G_d(n)$이 $n = d-3$에서 최솟값을 가질 때, 가능한 d를 모두 구하시오.

정답의 이유와 계산을 소문항 번호에 맞추어 작성하십시오. 대학 공식 시험지가 아닌 BlueMath 연습자료입니다.

B1 · 연습 답안지

공식 답안지의 복제가 아닌 수학3소문항 서술 연습용입니다.

이름: _____ 시작·종료: _____

(1)

(2)

(3)

B1-1 · 사다리꼴의 변과 각

수학·수학 I

첫 판단과 이유

밑변은 수평입니다. A에서 D까지의 가로·세로 이동을 각각 적으면 필요한 직각삼각형이 정해집니다.

변의 길이

A에서 D까지 가로 이동은 $2n-1$, 세로 이동은 $2n+1$이다.

$$AD^2=(2n-1)^2+(2n+1)^2=8n^2+2.$$

$n\ge 1$이므로 가로·세로 이동이 모두 양수이고 α는 예각이다.

제출용 모범답안

직각삼각형의 높이와 빗변을 이용하면

$$\sin\alpha=\frac{2n+1}{\sqrt{8n^2+2}}.$$

정답

$$\frac{2n+1}{\sqrt{8n^2+2}}.$$

부분점수·감점 요소

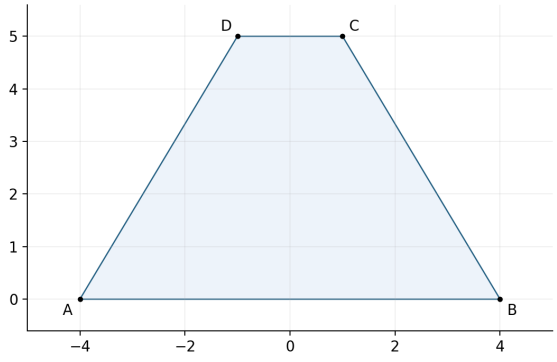
40점: 가로·세로 이동; 40점: AD의 제곱; 40점: 사인값.

사다리꼴의 높이와 옆변을 구별합니다.

정당하게 줄이는 계산

두 제곱을 더하면 n의 일차항 두 개의 합이0이 됩니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-1; 연결: 2027 자유전공 모의2-1·기존 CORE01·12

그림으로 확인



n=2인 사다리꼴의 실제 좌표 그림입니다. 위쪽 밑변 길이는2, 아래쪽은8, 높이는5입니다.

B1-2 · 중심의 높이가 일정한 최소 원

수학

첫 판단과 이유

네 꼭짓점 중 아래 두 점과 위 두 점까지의 거리 제곱을 비교합니다. 중심 후보의 높이가 n과 무관하게 정해지는 구조를 찾아봅니다.

후보를 구한다

중심을 $(0, c)$로 놓고 A, C까지의 거리를 같게 하면

$$4n^2 + c^2 = 1 + (2n + 1 - c)^2 \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

따라서 반지름 후보는 $R = \sqrt{4n^2 + 1}$이다. 네 꼭짓점이 모두 이 원 위에 있으므로 사다리꼴 전체도 들어간다.

임의의 중심과 비교

중심이 (u, v)인 원이 네 꼭짓점을 모두 포함한다면 반지름 ρ에 대해

$$\rho^2 \geq u^2 + \max\{4n^2 + v^2,\ 1 + (2n + 1 - v)^2\}.$$

$v \leq 1$일 때 둘째 식은 $1 + 4n^2$ 이상이고, $v \geq 1$일 때 첫째 식은 $4n^2 + 1$ 이상이다. 따라서 $\rho^2 \geq 4n^2 + 1$이다. 등호는 $u = 0$, $v = 1$일 때만 가능하다.

B1-2 · 모범답안과 점검

제출용 모범답안

중심 $(0,1)$, 반지름 $\sqrt{4n^2+1}$인 원은 네 꼭짓점을 지나고 사다리꼴 전체를 포함한다. 임의의 중심 (u,v)에 대한 위 거리 비교에서 반지름이 이보다 작을 수 없고 등호 조건은 $(u,v)=(0,1)$뿐이다. 따라서 $r(n)=\sqrt{4n^2+1}$이고 중심은 유일하다.

정답

$r(n)=\sqrt{4n^2+1}$, 중심 $(0,1)$.

부분점수·감점 요소

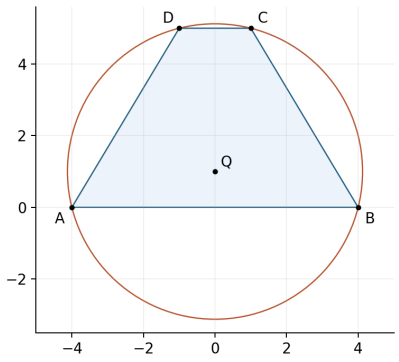
40점: 중심 후보; 40점: 반지름·전체 포함; 50점: 최소성·중심 유일성.

대칭을 이유로 처음부터 모든 포함 원의 중심을 x=0에 한정하지 않습니다.

정당하게 줄이는 계산

거리 제곱의 평균을 이용하면 가로 좌표 u를 한 번에 처리할 수 있습니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-2; 연결: A1-2·A2-1

그림으로 확인



n=2인 사다리꼴입니다. 최소 원의 중심 높이는1이고 네 꼭짓점은 모두 원 위에 있습니다.

B1-3 · 양옆 정수의 값 비교

수학 I ·수학 II

첫 판단과 이유

실수에서의 최소 위치가 반정수이면 양옆 정수까지의 거리가 같습니다. 그래도 함수값이 같다고 할 수 없으므로 실제 차를 구합니다.

다항함수와 증감

$F(n)=4n^4+8n^3+5n^2+2n+1$이다. $a_n=H_d(n)$인 다항함수는

$$H_d(x)=4x^4+\frac{4-8d}{3}x^3-(d+1)x^2+dx+1$$

이고

$$H_d'(x)=(2x+1)(4x-1)(2x-d).$$

$x\ge 1$에서 $c=\frac{d}{2}$ 전후로 감소·증가한다.

범위와 경계

$d=3$이면 지정한 n이0이므로 불가능하다. $d=4$이면 $N=1$이지만 $c=2$여서 $H_4(2)<H_4(1)$이다. $d\ge 5$에서는 $N=d-3\ge 2$이고

$$N-1<\frac{d}{2}<N+1 \quad\Longrightarrow\quad 4<d<8.$$

따라서 $d=5,6,7$만 확인하면 된다.

세 후보의 확인

d	c	N	결론
5	$\frac{5}{2}$	2	$H_5(2)=-45,\ H_5(3)=-38$이므로 성립
6	3	3	엄격한 감소·증가의 경계가3이므로 성립
7	$\frac{7}{2}$	4	$H_7(3)=-194,\ H_7(4)=-\frac{553}{3}$이므로 불성립

특히 $H_7(4)-H_7(3)=\frac{29}{3}>0$이다. 증감성에 의해 표의 양옆 정수 밖에서는 더 작은 값이 나올 수 없다.

B1-3 · 모범답안과 점검

제출용 모범답안

$H_d'(x) = (2x+1)(4x-1)(2x-d)$이므로 $x \geq 1$에서 $\frac{d}{2}$ 전후로 감소·증가한다. $d = 3, 4$를 제외하고 $N-1 < \frac{d}{2} < N+1$을 쓰면 후보는5,6,7이다. 양옆 자연수의 값 비교와 $d = 6$의 엄격한 증감성을 적용하면 가능한 값은5,6이다.

정답

$d = 5, 6$.

부분점수·감점 요소

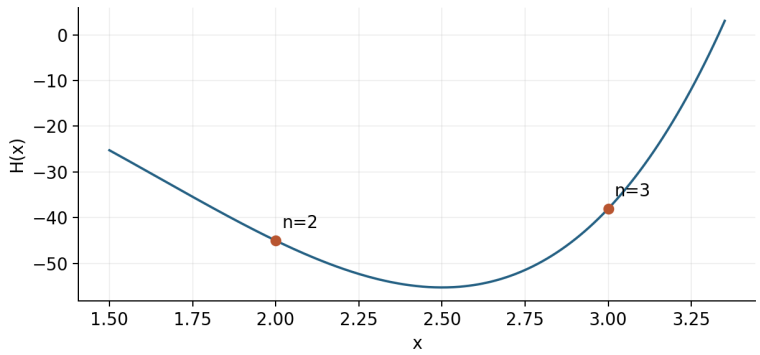
40점: 함수식·도함수; 40점: d=3,4와 후보 범위; 50점: 5·6·7의 확인; 20점: 전체 결론과 충분성.

실수 최소 위치와 같은 거리에 있는 두 정수에서 함수값이 같다고 판단하지 않습니다.

정당하게 줄이는 계산

일단 후보가 세 개로 줄어들면 전체 다항식을 반복 전개하지 말고 필요한 두 값의 차만 비교합니다.기존 번호·출처: BlueMath 신규 B1-3; 연결: 2027 자유전공 모의2-3·기존 CORE11·12

그림으로 확인



자연수 점과 같은 식의 다항함수 그래프를 함께 그렸습니다. 곡선에서 가장 낮은 위치와 자연수에서 가장 작은 값의 위치를 구별합니다.