2027학년도 / 수리논술

이화여대

자연 I

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

B1-1 35점

소문항 배점 8 · 8 · 9 · 10점

자연 I · 대문항 3개 · 100분 · 학습용 100점 · 검은색 필기구로 근거를 서술하십시오.

$f(x) = xe^x\ (x \geq 0)$이다.

(1) f가 $[0, \infty)$에서 엄격히 증가함을 보이시오.

(2) 실수 $k > 0$에 대하여 방정식 $f(x) = k$가 양의 실근을 오직 하나 가짐을 보이시오.

(3) $0 \leq a < b$일 때 $f(b) - f(a) > e^a(b - a)$임을 보이시오.

(4) $0 \leq a < b$, $m = \dfrac{a+b}{2}$일 때 $f(m) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$임을 보이고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 1$인 점에서의 접선이 $x \geq 0$에서 곡선보다 위에 있지 않음을 보이시오.

풀이 구상

B1-1 · 답안 작성

성명 _____ **소요시간** _____

소문항 번호를 구분하여 풀이와 결론을 함께 적으십시오.

B1-2 35점

소문항 배점 10 · 12 · 13점

1부터 10까지의 수가 하나씩 적힌 카드에서 4장을 동시에 같은 확률로 뽑는다. 뽑힌 수를 $a<b<c<d$라 하고 확률변수 $R=d-a$를 정의한다.

(1) 정수 r에 대하여 $R=r$인 경우의 수를 구하시오. 가능한 r의 범위도 쓰시오.

(2) R의 확률분포와 기댓값을 구하시오.

(3) $R=5$라는 조건에서 뽑힌 카드에 수 5가 포함될 확률을 구하시오.

풀이 구상

B1-2 · 답안 작성

성명 _____ **소요시간** _____

소문항 번호를 구분하여 풀이와 결론을 함께 적으십시오.

B1-3 30점

소문항 배점 8 · 12 · 10점

a, b는 양수이다. 타원 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$과 곡선 $C : |xy| = 1$이 서로 다른 네 점에서 만난다.

(1) 타원 위의 제1사분면 점에서 xy의 최댓값을 a, b로 나타내고 등호가 성립하는 점을 구하시오.

(2) a, b가 만족하는 관계식을 구하고, 그 관계가 교점 네 개를 보장함을 보이시오.

(3) $a^2 + 4b^2$의 최솟값과 이때의 (a, b)를 구하시오.

풀이 구상

B1-3 · 답안 작성

성명 _____ **소요시간** _____

소문항 번호를 구분하여 풀이와 결론을 함께 적으십시오.

B1-1 · 상세해설

첫 판단 증가와 접선의 위치는 서로 다른 함수의 도함수를 확인해야 합니다. 접선과 곡선의 차를 별도 함수로 두면 양쪽 구간의 부호가 보입니다.

1. 도함수의 두 인수가 모두 양수입니다

$f'(x) = (x+1)e^x > 0$이므로 $[0, \infty)$에서 엄격히 증가한다. 끝점 0을 포함한 두 점도 평균값 정리로 비교할 수 있다.

2. 구체적인 오른쪽 끝점을 택합니다

$f(0) = 0 < k$이고 $e^{k+1} > 1$이므로 $f(k+1) = (k+1)e^{k+1} > k$이다. 연속성으로 $(0, k+1)$에 해가 존재하고 (1)의 증가성으로 유일하다.

3. 평균값 정리의 중간점 위치를 사용합니다

$c \in (a, b)$가 있어 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = (c+1)e^c$이다. $c > a \geq 0$이므로 $e^c > e^a$, $c + 1 > 1$이다. 따라서 이 값은 e^a보다 크며 $b - a > 0$을 곱하면 결론이 나온다.

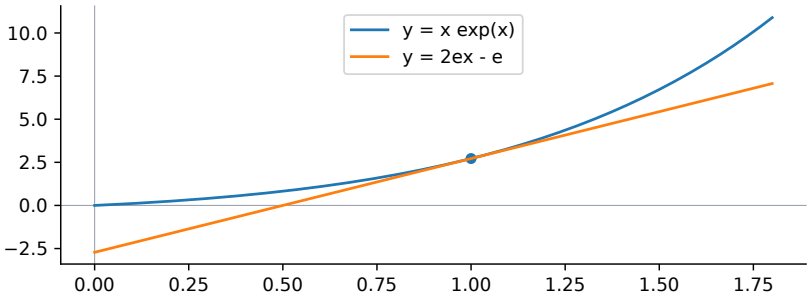
4. 도함수의 증가를 두 방식으로 적용합니다

$f''(x) = (x+2)e^x > 0$이므로 f'가 증가한다. (a, m)과 (m, b)에 평균값 정리를 각각 적용하면 같은 길이에서 오른쪽 증가량이 더 크다. 즉 $f(m) - f(a) < f(b) - f(m)$이다.

$x = 1$에서 $f(1) = e$, $f'(1) = 2e$이므로 접선은 $y = 2ex - e$이다. $D(x) = xe^x - 2ex + e$라 두면 $D(1) = 0$, $D'(x) = f'(x) - f'(1)$이다. f'의 증가로 $0 \leq x < 1$에서 $D' < 0$, $x > 1$에서 $D' > 0$이다. 따라서 D의 최솟값은 0이며 접선은 곡선 위로 올라가지 않는다. 등호는 $x = 1$에서만 성립한다.

B1-1 · 모범답안과 점검

정답 (1)–(4) 성립. 접선 $y = 2ex - e$, 접선과 곡선의 등호는 $x = 1$.



해설의 좌표·함수식으로 그린 그림입니다. 수학적 결론은 본문의 증명에 따릅니다.

시험장에서 쓸 모범답안

$f'(x) = (x+1)e^x > 0$, $f''(x) = (x+2)e^x > 0$이다. $[0, k+1]$의 양끝값으로 존재, 증가로 유일성을 얻는다. (3)과 중점 비교는 평균값 정리로 얻는다. 접선과의 차는 $x = 1$까지 감소하고 이후 증가하므로 최솟값이 0이다.

부분점수 기준

확인할 내용	점수
(1) 도함수·증가	8
(2) 연속성과 양끝값	4
(2) 유일성	4
(3) 중간점의 범위와 엄격한 부등식	9
(4) 두 구간 비교	5
(4) 접선과 차의 최솟값	5

학습용 기준입니다. 같은 결론에 이르는 동등한 논증도 인정합니다. 정답만 적으면 근거 단계의 점수는 부여하지 않습니다.

감점 요소와 주의

접점 오른쪽에서만 접선과의 차를 확인하면 전체 $x \geq 0$의 증명이 되지 않습니다.

정당한 풀이 단축

이계도함수로 도함수의 증가를 한 번 확인한 후 중점과 접선 문제에 공통으로 사용할 수 있습니다.

기존 교재와 출처 연결

신규 B1 전형 재현. 2027 공식 모의 자연 I 1번의 증가→존재·유일성→두 점 비교 구조를 xe^x로 바꾸고 접선의 전 구간 위치를 추가했습니다. 직접 복습 연결 A1-1, 기존 기본2회 2번.

B1-2 · 상세해설

첫 판단 범위가 고정되면 최솟값을 정하는 순간 최댓값도 정해집니다. 그다음 내부 카드만 고르면 됩니다.

1. 양끝을 정하고 그 사이의 두 수를 고릅니다

네 수가 서로 다르므로 $3 \le r \le 9$이다. $d = a + r$에서 a는 $1, \dots, 10 - r$ 중 하나이다. 두 끝 사이의 $r - 1$개 카드에서 b, c를 고르므로

$$N(R = r) = (10 - r)\binom{r - 1}{2} \quad (3 \le r \le 9).$$

서로 다른 최소·최댓값은 겹치지 않고 모든 선택은 자신의 양끝이 유일하므로 중복과 누락이 없다. 이 범위 밖은 0이다.

2. 분포를 만든 뒤 전체 경우 수와 대조합니다

전체는 $\binom{10}{4} = 210$가지이다.

r	3	4	5	6	7	8	9
$N(R = r)$	7	18	30	40	45	42	28

경우의 수의 합은 210이다. 표의 각 수를 210으로 나누면 확률분포가 된다.

$$E(R) = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 40 + 7 \cdot 45 + 8 \cdot 42 + 9 \cdot 28}{210} = \frac{1386}{210} = \boxed{\frac{33}{5}}.$$

3. 조건을 만족하는 30가지 안에서 다시 셉니다

$R = 5$이면 $(a, d) = (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)$이다. 각각 내부 카드 두 장을 고르는 방법은 $\binom{4}{2} = 6$가지이므로 총 30가지이다. 앞의 네 양끝쌍에서는 5가 내부에 있다. 5를 반드시 고르고 나머지 한 장은 다른 내부 카드 세 장 중에 고르므로 각각 3가지이다. 마지막 $(5, 10)$에서는 5가 이미 끝점이라 6가지 모두 해당한다. 따라서

$$P(\text{5가 포함됨} \mid R = 5) = \frac{4 \cdot 3 + 6}{30} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

B1-2 · 모범답안과 점검

정답 $(1)(10-r)\binom{r-1}{2}\ (3\le r\le 9)$, 나머지 0; $(2)\dfrac{33}{5}$; $(3)\dfrac{3}{5}$.

시험장에서 쓸 모범답안

a의 선택 $10-r$가지와 내부 두 장의 선택을 곱한다. $r=3,\dots,9$의 경우의 수는 $7,18,30,40,45,42,28$이며 평균은 $\dfrac{33}{5}$이다. $R=5$인 다섯 끝점쌍 중 네 쌍은 5를 내부에서 고르고 한 쌍은 끝점으로 포함하므로 $\dfrac{18}{30}=\dfrac{3}{5}$이다.

부분점수 기준

확인할 내용	점수
(1) 가능한 범위와 양끝 선택	5
(1) 내부 조합·일대일 집계	5
(2) 분포	6
(2) 기댓값 계산	6
(3) 새 표본공간 30	5
(3) 내부·끝점 경우 분류	4
(3) 확률 결론	4

학습용 기준입니다. 같은 결론에 이르는 동등한 논증도 인정합니다. 정답만 적으면 근거 단계의 점수는 부여하지 않습니다.

감점 요소와 주의

조건부 선택에서 카드 5를 항상 내부 카드로 세면 끝점인 경우를 놓칩니다. 각 r가 같은 확률인 것은 아닙니다.

정당한 풀이 단축

분포 계산은 끝점쌍과 내부 선택의 두 단계로 끝낼 수 있습니다. 네 카드를 직접 나열할 필요는 없습니다.

기존 교재와 출처 연결

신규 B1 전형 재현. 2027 모의 자연 I 2번의 카드 선택을 유지하되 최소 간격 대신 전체 범위와 특정 카드의 포함 여부를 묻습니다. A1-2·A2-2 및 기존 기본1회 2번과 비교합니다.

B1-3 · 상세해설

첫 판단 축 대칭을 이용해 첫 사분면만 봅니다. 최댓값과 교점 한 개의 관계는 해의 개수를 직접 확인해 마무리합니다.

1. 타원의 식을 두 제곱의 합으로 봅니다

$u=\dfrac{x}{a}>0, v=\dfrac{y}{b}>0$라 두면 $u^2+v^2=1$이다. $(u-v)^2\ge 0$에서 $2uv\le 1$이므로 $xy=abuv\le \dfrac{ab}{2}$이다. 등호는 $u=v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 $(x,y)=(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$에서 성립한다.

2. 교점의 정확한 개수를 분류합니다

좌표축 위에는 $|xy|=1$인 점이 없고 두 도형은 두 축에 대칭이므로 제1사분면 교점 수의 네 배가 전체 교점 수이다. $s=u^2\in(0,1)$로 두면 $v^2=1-s$이고 $xy=1$은

$$s(1-s)=\frac{1}{a^2b^2}$$

과 같다. 왼쪽은 $\dfrac{1}{4}-(s-\dfrac{1}{2})^2$이므로 $ab<2$이면 해가 없고, $ab=2$이면 $s=\dfrac{1}{2}$ 한 개, $ab>2$이면 $(0,1)$ 안의 서로 다른 해 두 개이다. 따라서 전체 교점 네 개의 필요충분조건은 $\boxed{ab=2}$이다.

3. 정해진 곱을 이용해 제곱합을 비교합니다

$(a-2b)^2\ge 0$에서 $a^2+4b^2\ge 4ab=8$이다. 등호 조건 $a=2b$와 $ab=2$를 함께 풀면 $(a,b)=(2,1)$이다. 두 수는 양수이고 $ab=2$이므로 실제 교점 네 개 조건도 충족한다. 최솟값은 $\boxed{8}$이다.

B1-3 · 모범답안과 점검

정답 $(1)\dfrac{ab}{2},\ (\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ $(2)ab=2$ $(3)8,\ (a,b)=(2,1)$

시험장에서 쓸 모범답안

$u^2+v^2=1$에서 $uv\le\dfrac{1}{2}$이다. $s=u^2$로 바꾸면 $s(1-s)=\dfrac{1}{a^2b^2}$의 해가 첫 사분면 교점에 일대일로 대응한다. 한 개 조건은 $ab=2$이다. $(a-2b)^2\ge 0$으로 최솟값 8과 등호 $(2,1)$을 얻는다.

부분점수 기준

확인할 내용	점수
(1) 좌표의 정규화	4
(1) 최대·등호점	4
(2) 사분면 대응	4
(2) 세 경우의 해 개수	5
(2) 필요충분 결론	3
(3) 하한	5
(3) 등호의 실제 성립	5

학습용 기준입니다. 같은 결론에 이르는 동등한 논증도 인정합니다. 정답만 적으면 근거 단계의 점수는 부여하지 않습니다.

감점 요소와 주의

최댓값이 1보다 큰 경우에도 교점은 있습니다. 다만 사분면마다 두 개라 전체 여덟 개입니다.

정당한 풀이 단축

제곱합의 최소는 미분 없이 하나의 제곱으로 처리할 수 있습니다.

기존 교재와 출처 연결

신규 B1 전형 재현. 2027 모의 자연 I 3번의 대칭·교점 수 구조에서 마름모를 타원으로 바꾸고 목표를 가중 제곱합으로 바꾸었습니다. 복습 A2-3, 기존 기본3회 2번.