2027학년도 / 수리논술

이화여대

자연 II

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

제1회 · 문제 1 [30점]

$x \geq 0$에서 $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$라 한다.

(1) $x > 0$이면 $xe^{-x^2} < F(x) < x$임을 보이시오.

(2) $F(x) = x/2$를 만족하는 양수 x가 유일함을 증명하시오. 필요한 경우 $t \geq 1$에서 $e^{-t^2} \leq te^{-t^2}$를 이용하시오.

(3) $a > 0$일 때 $\int_0^a \{F(t) - tF'(t)\} dt$를 $a, F(a)$로 나타내고, 그 값이 양수임을 설명하시오.

조건과 정의역 · 사용한 정리 · 계산 · 결론을 분명히 적으세요.

최민구 · 자체 예상 2

제1회 · 문제 1 답안지

이름: _____ 소요 시간: _____분

제1회 · 문제 2 [30점]

서로 다른 네 점에 $1, 2, 3, 4$라는 번호를 붙인다. 두 점을 잇는 여섯 선분 중 서로 다른 세 개를 같은 확률로 선택한다. 선분이 중간에서 교차하더라도 교차점에서는 갈아탈 수 없고, 번호가 붙은 끝점에서만 다른 선분으로 옮길 수 있다. 점1에서 나가는 선택된 선분의 개수를 D라 한다. 선택된 선분을 따라 모든 두 점 사이를 오갈 수 있는 사건을 C라 한다.

(1) D의 확률분포를 구하시오.

(2) $P(C)$를 구하시오. 연결되지 않는 경우를 빠짐없이 설명하시오.

(3) C라는 조건에서 D의 확률분포와 기댓값을 구하고, $P(C \mid D = 2)$도 구하시오.

조건과 정의역 · 사용한 정리 · 계산 · 결론을 분명히 적으세요.

제1회 · 문제 2 답안지

이름: _____ 소요 시간: _____분

제1회 · 문제 3 [40점]

공간에서 두 점 $P=(s,s,0)$, $Q=(1,t,1+t)$가 각각 실수 s,t에 따라 움직인다.

(1) 두 점의 자취가 각각 직선임을 설명하고 두 직선이 만나지 않음을 보이시오. PQ^2를 s,t로 나타내시오.

(2) 실수 s,t 전체에서 PQ의 최솟값과 그때의 (s,t)를 구하시오. 등호 조건의 유일성도 설명하시오.

(3) 이제 $s\ge 0, t\ge 0$으로 제한한다. PQ의 최솟값과 등호 조건을 구하고, (2)의 답을 그대로 사용할 수 없는 이유를 설명하시오.

조건과 정의역 · 사용한 정리 · 계산 · 결론을 분명히 적으세요.

최민구 · 자체 예상 6

제1회 · 문제 3 답안지

이름: _____ 소요 시간: _____분

제1회 · 문제 1

적분으로 정의한 함수의 양의 해

빠른 정답 (1) $xe^{-x^2} < F(x) < x$. (2) 유일한 양근은 $(\sqrt{\ln 2}, 4)$ 안에 있다. (3) $aF(a) + e^{-a^2} - 1 > 0$.

(1) 구간 안에서 피적분함수를 비교한다. $0 < t < x$에서 $e^{-x^2} < e^{-t^2} < 1$이다. 이를 길이 x인 구간에서 적분하면 두 엄격한 부등식을 얻는다. 끝점에서의 등호는 구간 내부의 엄격한 부등식을 바꾸지 않는다.

(2) 증가 후 감소와 실제 음수값을 확인한다. $H(x) = F(x) - x/2$라 하면 $H(0) = 0$, $H'(x) = e^{-x^2} - 1/2$이다. $b = \sqrt{\ln 2}$를 기준으로 $(0, b)$에서 증가하고 (b, ∞)에서 감소하므로 $H(b) > 0$이다. 한편 $x \geq 1$에서

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq 1 + \int_1^x te^{-t^2}\,dt < 1 + \frac{1}{2e} < \frac{3}{2}.$$

따라서 $H(4) < 3/2 - 2 < 0$이다. 사잇값 정리로 $(b, 4)$에 해가 있으며 이 구간 이후까지 H가 엄격히 감소하므로 양의 해는 하나뿐이다. $(0, b]$에서는 $H > 0$이다. 피적분함수의 부정적분을 특별한 함수로 표현할 필요가 없다.

(3) 부분적분한다. 적분의 기본정리로 $F'(t) = e^{-t^2}$이고

$$\int_0^a F(t)dt = aF(a) - \int_0^a tF'(t)dt, \qquad \int_0^a te^{-t^2}dt = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}.$$

따라서 구하는 값은 $aF(a) + e^{-a^2} - 1$이다. (1)에서 모든 $t > 0$에 대해 $F(t) > tF'(t)$이므로 원래 적분의 피적분함수가 양수이다. 따라서 이 식도 $a > 0$에서 양수임을 알 수 있다.

제1회 · 문제 2

네 점을 잇는 세 선분

빠른 정답 (1) $d=0,1,2,3$에서 $(1,9,9,1)/20$. (2) $4/5$. (3) $d=1,2,3$에서 $(9,6,1)/16$, 기댓값 $3/2$, $P(C\mid D=2)=2/3$.

(1) 점1에 닿는 선분과 나머지를 나눈다. 전체 선택은 $\binom{6}{3}=20$가지이다. 점1에 닿는 선분은3개, 닿지 않는 선분도3개이므로 $D=d$의 선택 수는 $\binom{3}{d}\binom{3}{3-d}$이다. 따라서 $d=0,1,2,3$에 대한 확률은 차례로 $(1,9,9,1)/20$이다.

(2) 떨어진 묶음의 크기로 분류한다. 네 점이 연결되지 않을 때, 각각 두 점인 묶음 둘로 나뉘면 묶음 안의 선분은 최대2개뿐이다. 크기2와1과1로 나뉘면 최대1개뿐이고, 네 점이 모두 따로이면 선분이0개이다. 세 선분을 선택했으므로 가능한 비연결 형태는 세 점이 삼각형을 이루고 남은 한 점이 떨어진 경우뿐이다. 떨어진 점을 고르는4가지가 있으므로 $P(C)=16/20=4/5$이다.

(3) 비연결인 네 선택을 분포에서 뺀다. 떨어진 점이1이면 $D=0$인 한 경우이다. 다른 점이 떨어지면 점1은 삼각형의 꼭짓점이므로 $D=2$이며 세 경우이다. 따라서 연결된16가지 중 $D=1,2,3$의 개수는 $9,6,1$이다. 조건부 기댓값은

$$\frac{1\cdot 9+2\cdot 6+3\cdot 1}{16}=\frac{3}{2}.$$

$D=2$인 전체9가지 중 연결된 것은6가지이므로 $P(C\mid D=2)=2/3$이다. 두 조건부확률은 서로 다른 분모를 사용한다.

제1회 · 문제 3

공간의 두 직선 사이 거리

빠른 정답 (1) 만나지 않는 두 직선, $PQ^2=(s-1)^2+(s-t)^2+(1+t)^2$. (2) $2/\sqrt{3}$, $(s,t)=(1/3,-1/3)$ 유일. (3) $\sqrt{3/2}$, $(s,t)=(1/2,0)$ 유일.

(1) 좌표가 움직이는 방향을 읽는다. $P=(0,0,0)+s(1,1,0)$, $Q=(1,0,1)+t(0,1,1)$이므로 두 자취는 직선이다. 두 점이 같다면 첫 좌표에서 $s=1$, 둘째에서 $t=s=1$이어야 하지만 셋째는 $0=2$가 되어 모순이다. 두 직선은 만나지 않는다. 공간의 거리 공식으로

$$PQ^2=(s-1)^2+(s-t)^2+(1+t)^2.$$

(2) 제곱의 합으로 완성한다. s에 관한 두 항을 먼저 정리한 뒤 t에 대해 정리하면

$$PQ^2=2\left(s-\frac{1+t}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}.$$

따라서 최솟값은 $PQ=2/\sqrt{3}$이다. 등호는 두 제곱이 동시에0, 즉 $t=-1/3$, $s=1/3$일 때만 성립한다. 이 값들은 실수 전체라는 조건을 만족하므로 하한이 실제로 달성된다.

(3) 제한된 범위에서는 꼭짓점을 사용할 수 없다. $t\ge 0$에서는 $(t+1/3)^2\ge 1/9$이고 등호는 $t=0$이다. 위 완전제곱식으로

$$PQ^2\ge \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{3}=\frac{3}{2}.$$

$t=0$에서 나머지 제곱을0으로 만드는 $s=1/2$는 $s\ge 0$을 만족한다. 따라서 최소 거리는 $\sqrt{3/2}$이며 등호는 $(s,t)=(1/2,0)$일 때 유일하다. (2)의 최소점은 $t=-1/3<0$이어서 새 조건에서 제외된다. 외적이나 공간벡터의 거리 공식을 전제하지 않고 좌표 거리만으로 구했다.