2027학년도 / 약술형논술 수학

가천대

의예

최종점검

FINAL 10

맛보기 / 제01회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

신규 예상 B3-1 10점

수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·미적분 · 8문항 · 권장 80분 · 문항 점수 130점

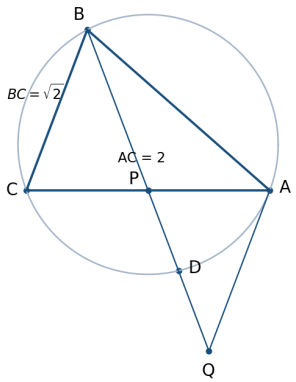
두 양수 a, b가 $4^a = 16^b$, $|a + b - ab| = 1$을 만족한다. $a - b$의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-2 15점

$AC = 2$, $BC = \sqrt{2}$인 삼각형 ABC에서 P는 선분 AC의 중점이다. A를 지나 BC와 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 Q, 선분 PQ의 중점을 D라 하자. Q는 직선 AC에 대하여 B와 반대쪽에 있고 A, B, C, D는 한 원 위에 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.



풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-3 15점

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 자연수 k, m이

$$a_k = 0, \qquad \sum_{n=1}^{m} a_n = 15, \qquad \sum_{n=1}^{m} |a_n| = 75$$

를 만족한다. a_1, k, m을 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-4 15점

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f가 $f(1)=2$, $f(-1)=-2$를 만족한다. 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근이 정확히 1개일 때, $f(2)$의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-5 20점

실수 k에 대하여

$$L(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ke^{\frac{i}{n}}-1\right)^2$$

라 하자. $L(k)$의 최솟값과 그때의 k를 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-6 15점

함수 $f(x)=x^3+x$의 역함수를 g라 하자. $\int_0^2 \{f(x)+g(x)\}\,dx$를 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-7 20점

함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$가 $f'(1)=f''(1)=0$을 만족한다. $|t-f(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수를 $h(t)$라 할 때, a, b와 $h(t)$를 구하고 h의 불연속점인 t를 모두 구하는 과정을 서술하시오. 단, $x\to\infty$일 때 $f(x)\to 0$, $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\infty$임을 이용해도 된다.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

신규 예상 B3-8 20점

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f가 다음 조건을 만족한다.

1. 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(3x-2)}{f(x)}$의 값이 유한하게 존재한다.
2. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$의 서로 다른 교점은 2개이고, 두 교점의 x좌표는 모두 정수이다.

$f(x)$와 두 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.

풀이와 답안

풀이 과정을 서술하십시오. 문항별 배점은 BlueMath 학습용 배점입니다.

B3-1 해설 · 지수 관계와 절댓값의 경우 분류

정답 최댓값 $\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$, 최솟값 $\dfrac{1}{2}$

첫 판단 지수의 밑을 통일하여 변수를 하나로 줄인 뒤 절댓값 안의 식이 1 또는 -1인 두 경우를 빠짐없이 풉니다.

1. 한 변수로 바꿉니다

$4^a = 16^b = 4^{2b}$이고 밑이 1이 아니므로 $a = 2b$입니다. 따라서 $a - b = b$이고 절댓값 조건은 $|3b - 2b^2| = 1$입니다.

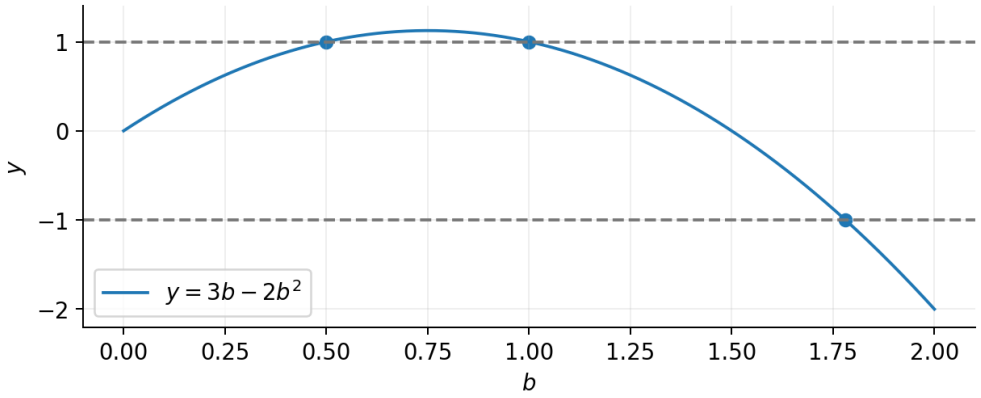
2. 두 경우의 양수 해를 모두 구합니다

$3b - 2b^2 = 1$이면 $2b^2 - 3b + 1 = (2b-1)(b-1) = 0$이므로 $b = \frac{1}{2}, 1$입니다. $3b - 2b^2 = -1$이면 $2b^2 - 3b - 1 = 0$이므로 $b = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$입니다. 이 중 음수인 $\frac{3-\sqrt{17}}{4}$는 제외합니다.

3. 값을 비교하고 원조건을 확인합니다

가능한 b는 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}$입니다. 마지막 값은 1보다 크므로 물음의 최솟값은 $\frac{1}{2}$, 최댓값은 $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$입니다. 각 후보에서 $a = 2b > 0$으로 정하면 지수식과 원래 절댓값 조건이 모두 성립합니다.

B3-1 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

밑을 통일하면 $a = 2b$이다. $|3b - 2b^2| = 1$의 양수 해는 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}$이다. $a - b = b$이므로 최댓값은 $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
지수 관계로 한 변수화	2
절댓값의 두 경우	4
양수 조건과 비교	2
원조건·달성 확인	2

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

절댓값 안이 1인 경우만 풀면 최댓값 후보를 놓칩니다. 음수인 b는 제외하되 양수인 세 후보를 모두 남깁니다.

정당한 풀이 단축

물음 $a - b$가 곧 b이므로 a의 값을 각각 따로 계산할 필요가 없습니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 직접변형. 제공 2027 한의예·약학 모의 1번의 지수 관계·절댓값 분류를 의예 범위 안에서 참고. 원래 계열을 의예 모의로 표시하지 않고 조건을 새로 설계.

B3-2 해설 · 원과 중점 조건의 실전 복원

정답 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

첫 판단 중점·평행선·현의 곱을 순서대로 복원하고, 마지막 물음이 반지름인지 넓이인지 다시 확인합니다.

1. 점의 비와 현의 곱을 구합니다

$AP = CP = 1$이고 닮음에서 $PQ = PB$입니다. D가 중점이므로 $PD = \frac{1}{2}PB$이고, P에서 만나는 두 현에 대해

$$1 = PA \cdot PC = PB \cdot PD = \frac{1}{2}PB^2, \qquad PB^2 = 2.$$

2. 끼인각과 넓이를 계산합니다

삼각형 PBC에서 $C = \angle ACB$라 쓰면

$$2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\cos C, \qquad \cos C = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

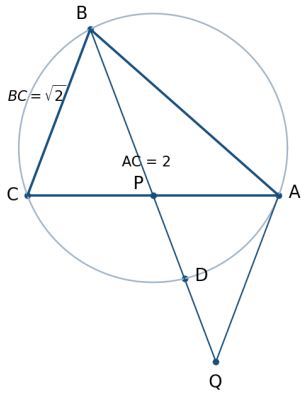
$0 < C < \pi$이므로 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$입니다. 따라서

$$\text{넓이} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

3. 도형의 존재와 조건을 확인합니다

$C = (0,0), A = (2,0), B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$라 두면 길이 조건이 맞습니다. $P = (1,0)$, $Q = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2})$, $D = (\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4})$이며 네 점은 중심 $(1, \frac{1}{\sqrt{7}})$, 반지름 제곱 $\frac{8}{7}$인 원 위에 있습니다. 점의 순서·평행 조건도 성립합니다.

B3-2 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

닮음과 중점 조건에서 $PQ = PB$, $PD = \frac{1}{2}PB$이다. 현의 곱에서 $PB^2 = 2$이고 삼각형 PBC의 코사인법칙으로 $\cos C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
닮음·중점	4
현의 곱	4
각의 사인값	4
넓이·가능성	3

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

도형의 모양만 보고 직각을 추가하지 않습니다. 이번 최종 물음은 외접원의 반지름이 아니라 삼각형의 넓이입니다.

정당한 풀이 단축

사인값을 구했으면 삼각형의 세 변을 모두 구하지 않고 넓이 공식으로 마무리합니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 직접변형·최종 리허설. 제공 2027 의예 모의 1번의 구조를 재현하고 주어진 변과 물음을 넓이로 변경. B1-1과 같은 원형의 재훈련임을 명시.

B3-3 해설 · 절댓값 합에서 등차수열 복원

정답 $a_1 = -12, k = 5, m = 10$

첫 판단 두 합의 차로 음수인 항들의 합을 먼저 구합니다. 0이 되는 항의 위치가 등차수열의 부호를 정합니다.

1. 음수인 항의 합을 분리합니다

$a_k = 0$이므로 $a_n = 3(n-k)$입니다. 전체 합이 양수이므로 $m \geq k$이고, k보다 앞의 항은 음수, 뒤의 항은 양수입니다. 양수 항의 합을 P, 음수 항의 합을 N이라 두면

$$P + N = 15, \quad P - N = 75, \qquad N = -30.$$

2. 영인 항의 위치와 첫째항을 구합니다

음수인 항들은 $-3(k-1), -3(k-2), \ldots, -3$이므로

$$N = -\frac{3k(k-1)}{2} = -30, \qquad k(k-1) = 20.$$

k는 자연수이므로 $k = 5$이고 $a_1 = 3(1-5) = -12$입니다.

3. 항의 개수와 충분성을 확인합니다

$\sum_{n=1}^{m} 3(n-5) = \frac{3m(m-9)}{2} = 15$이므로 $(m-10)(m+1) = 0$입니다. 자연수 해는 $m = 10$뿐입니다. 이때 음수 항의 합은 -30, 양수 항의 합은 45여서 전체 합은 15, 절댓값 합은 75입니다. $a_5 = 0$도 만족하므로 구한 세 값이 모두 원조건을 만족합니다.

B3-3 · 답안과 확인

시험장에서 쓸 모범답안

$a_n = 3(n-k)$이고 음수 항의 합은 $\frac{15-75}{2} = -30$이다. 따라서 $-\frac{3k(k-1)}{2} = -30$에서 $k=5$, $a_1 = -12$이다. 전체 합은 $\frac{3m(m-9)}{2} = 15$이므로 자연수 $m = 10$이다. 두 합과 영인 항을 대입하면 모두 성립한다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
부호 구분·음수 항의 합	4
k·첫째항	4
합의 식·자연수 m	4
역확인·유일성	3

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

영인 항을 음수 항의 개수에 포함해도 값은 0이지만, 음수 항의 합 공식에서 마지막 항의 번호를 혼동하지 않습니다. 이차방정식의 음수 해는 제외합니다.

정당한 풀이 단축

첫째항을 모르는 상태에서 절댓값을 직접 풀기보다 두 합을 더하고 빼서 부호별 합을 구합니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 직접변형. 기존 공통 워크북 WB 02(2026 인문 A 실제 기출 2번)의 공차·두 합을 바꾸고 자연수·영인 항 조건을 확인하도록 설계.

B3-4 해설 · 일대일 삼차함수와 가능한 값의 범위

정답 최댓값 $10+3\sqrt{3}$, 최솟값 $10-3\sqrt{3}$

첫 판단 두 함수값으로 계수를 줄인 뒤, 수평선과 한 번 만나는 조건을 도함수의 부호와 연결합니다.

1. 두 점을 지나는 조건을 사용합니다

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 두면 $f(1)=2, f(-1)=-2$에서 $b=1, c=-a$입니다. 따라서

$$f(x)=x^3+ax^2+x-a, \quad f'(x)=3x^2+2ax+1, \quad f(2)=10+3a.$$

2. 허용되는 계수의 범위를 필요조건으로 구합니다

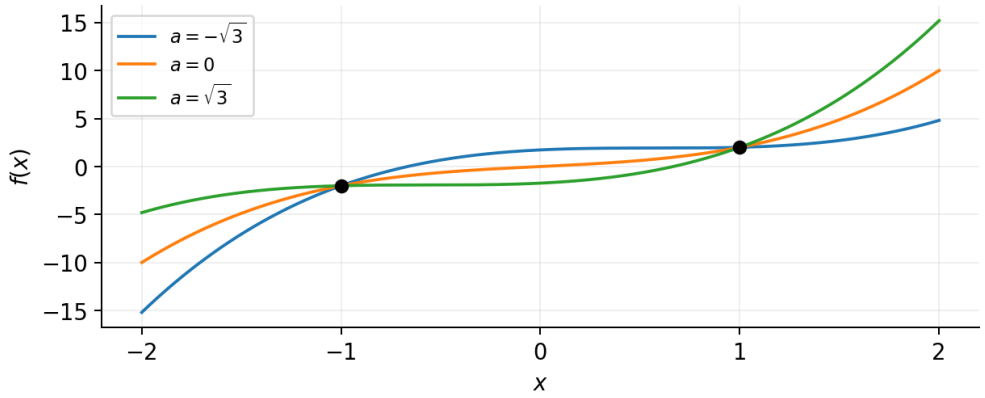
도함수가 음수인 구간이 있으면 위로 열린 이차함수 f'는 두 실근을 갖습니다. 이때 f는 증가·감소·증가하고 서로 다른 극댓값과 극솟값을 갖습니다. 그 사이 높이의 수평선은 각 구간에서 한 번씩, 총 세 번 만나므로 주어진 조건과 모순입니다. 따라서 모든 x에서 $f'(x)\ge 0$이어야 합니다.

$$f'(x)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+1-\frac{a^2}{3}\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a^2\le 3.$$

3. 양 끝 계수도 실제 허용됨을 확인합니다

$|a|<\sqrt{3}$이면 $f'>0$이어서 엄격히 증가합니다. $a=\pm\sqrt{3}$일 때는 $f'=3(x+\frac{a}{3})^2$이고 f는 $(x+\frac{a}{3})^3$에 상수를 더한 함수이므로 역시 엄격히 증가합니다. 모든 경우 양 끝의 극한이 각각 $-\infty,\infty$이므로 모든 수평선과 정확히 한 번 만납니다. 따라서 $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$가 필요충분조건이며, $f(2)=10+3a$의 최대·최소는 각각 $10+3\sqrt{3}, 10-3\sqrt{3}$입니다.

B3-4 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

두 함수값에서 $f=x^3+ax^2+x-a$이다. f'가 음수인 구간이 있으면 삼차함수의 두 극값 사이 수평선이 세 번 만나므로 모순이다. $f'=3(x+\frac{a}{3})^2+1-\frac{a^2}{3}\geq 0$에서 $a^2\leq 3$이다. 양 끝값에서도 평행이동한 세제곱함수여서 엄격히 증가하므로 허용된다. $f(2)=10+3a$에서 최대·최소는 $10\pm 3\sqrt{3}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
함수값으로 계수 정리	3
일대일 조건과 도함수의 필요성	5
범위·양 끝 충분성	4
최대·최소와 달성	3

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

일대일이려면 도함수가 모든 점에서 반드시 양수여야 한다고 쓰면 양 끝 후보를 잘못 제외합니다. 한 점에서만 0인 경우도 확인합니다.

정당한 풀이 단축

함수를 모두 구하지 않고 남은 계수 하나의 범위를 구하면 물음이 일차식의 최대·최소로 바뀝니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 조건변경. 2026 의예 기출 8번·A2-4의 모든 수평선과 한 번 만나는 조건을 범위 문제로 재설계. 도함수가 한 점에서 0인 양 끝 후보도 허용되는지 확인.

B3-5 해설 · 구분구적합을 매개변수의 이차식으로

정답 최솟값 $\dfrac{3-e}{e+1}$, $k=\dfrac{2}{e+1}$

첫 판단 k를 고정하여 구분구적법을 적용한 뒤, 계산한 적분값을 k에 대한 이차식으로 봅니다.

1. 연속함수의 정적분으로 바꿉니다

각 실수 k에 대하여 $(ke^x-1)^2$은 $[0,1]$에서 연속이므로

$$L(k)=\int_0^1 (ke^x-1)^2dx=k^2\int_0^1 e^{2x}dx-2k\int_0^1 e^x dx+1.$$

2. 매개변수의 이차식으로 정리합니다

$$L(k)=\frac{e^2-1}{2}k^2-2(e-1)k+1.$$

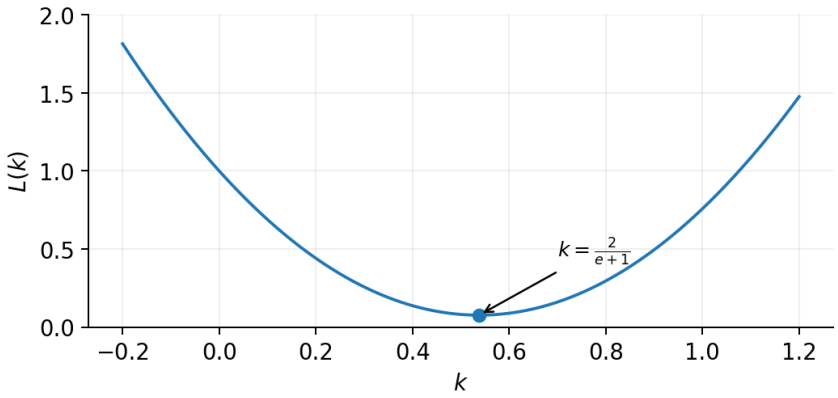
$e>1$이므로 이차항 계수는 양수입니다. 완전제곱식으로 바꾸면

$$L(k)=\frac{e^2-1}{2}\left(k-\frac{2}{e+1}\right)^2+\frac{3-e}{e+1}.$$

3. 최솟값과 유일한 등호 조건을 확인합니다

제곱항은 0 이상이고, 유일하게 $k=\frac{2}{e+1}$에서 0입니다. 따라서 최솟값은 $\frac{3-e}{e+1}$입니다. 이 k도 실수 범위 안에 있고 구분구적법이 성립하므로 실제로 달성됩니다. 원래 적분은 제곱식의 적분입니다. 최소를 주는 경우에도 ke^x-1이 모든 x에서 0이 될 수 없으므로 적분값은 양수입니다. 계산한 최솟값의 부호도 이 사실과 일치합니다.

B3-5 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

구분구적법에서 $L(k) = \int_0^1 (ke^x - 1)^2 dx = \frac{e^2-1}{2}k^2 - 2(e-1)k + 1$이다. 완전제곱식으로 정리하면 $\frac{e^2-1}{2}(k - \frac{2}{e+1})^2 + \frac{3-e}{e+1}$이므로 유일한 최소점은 $k = \frac{2}{e+1}$이고 최솟값은 $\frac{3-e}{e+1}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
구분구적법·연속성	5
두 지수함수의 적분	5
정확한 완전제곱식	6
최소·유일성·달성	4

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

$\int_0^1 e^{2x}dx$의 값에서 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리지 않습니다. 정적분을 계산하기 전의 변수 x와 최적화할 변수 k를 구별합니다.

정당한 풀이 단축

지수함수의 복잡한 최적화로 다루지 않고 적분 뒤 이차식의 꼭짓점으로 정리합니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 전형 재현·발상 결합. 2027 의예 모의 2번의 구분구적법과 기존 의예 CORE 08의 최적화를 연결하여 제곱식의 지수함수 적분을 매개변수 이차식으로 정리.

B3-6 해설 · 원함수와 역함수의 적분을 나누어 계산

정답 $\dfrac{29}{4}$

첫 판단 합의 적분을 두 적분으로 나누고, 역함수 부분에만 원래 함수의 입력을 이용합니다.

1. 원함수의 적분을 계산합니다

$f'(x)=3x^2+1>0$이고 치역이 실수 전체이므로 역함수 g가 존재합니다.

$$\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=4+2=6.$$

2. 역함수 부분의 구간을 바꿉니다

$f(0)=0, f(1)=2$이므로 $t=f(u)$로 치환하면

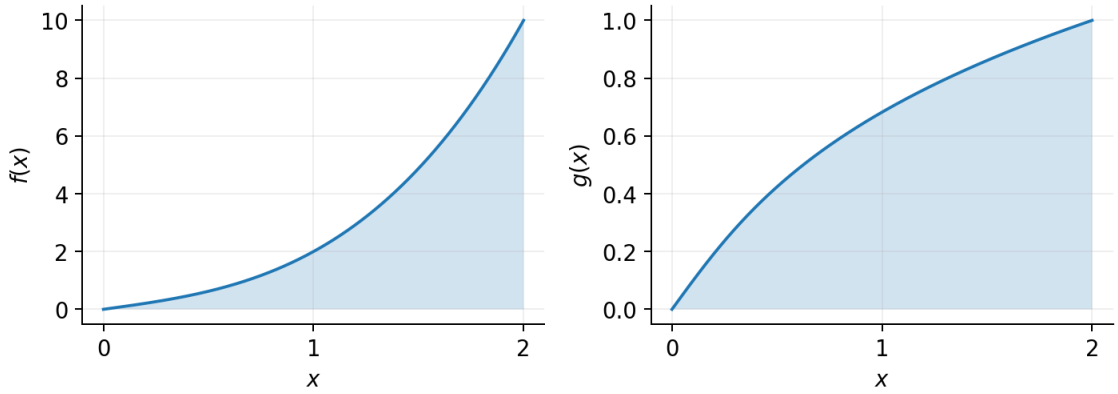
$$\int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 u(3u^2+1)du=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}.$$

이 부분은 $2\cdot 1-\int_0^1 f(u)du=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$라는 넓이 관계로도 확인됩니다.

3. 두 적분을 합칩니다

구하는 값은 $6+\frac{5}{4}=\frac{29}{4}$입니다. 원함수 적분의 구간 $[0,2]$와 역함수 적분을 치환한 뒤의 구간 $[0,1]$을 구별했습니다.

B3-6 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

$f'>0$이므로 g가 존재한다. 원함수의 적분은 6이다. $t=f(u)$로 치환하면 $\int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 u(3u^2+1)du=\frac{5}{4}$이다. 따라서 합은 $\frac{29}{4}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
역함수·끝값 대응	3
원함수 적분	3
역함수 적분·치환·검산	6
구간 구별·합	3

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

두 적분을 모두 같은 방식으로 구간 변경하지 않습니다. 원함수는 처음 구간 그대로 직접 적분하면 됩니다.

정당한 풀이 단축

역함수만 치환하여 다항식 적분으로 계산합니다. 역함수의 명시적 식을 구할 필요는 없습니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 최종 리허설. 2027 의예 모의의 역함수 학습축 및 B1-6을 참고하되 같은 구간에서 원함수와 역함수의 적분을 더하도록 물음을 변경.

B3-7 해설 · 수평접선과 절댓값의 미분가능성

정답 $a=0, b=1$; $h(t)=1$ $(t>0,\ t\neq\frac{2}{e})$, 그 밖에는 0; 불연속점 $0, \frac{2}{e}$

첫 판단 도함수가 0인 점을 찾았다고 바로 극값이라고 하지 않습니다. 도함수의 좌우 부호와 절댓값의 미분계수를 각각 확인합니다.

1. 두 도함수 조건으로 계수를 정합니다

$$f'(x)=e^{-x}\{-x^2+(2-a)x+a-b\},$$
$$f''(x)=e^{-x}\{x^2+(a-4)x+b-2a+2\}.$$

첫째 조건에서 $1-b=0$이므로 $b=1$입니다. 둘째 조건에 이를 대입하면 $-a=0$이므로 $a=0$입니다. 따라서

$$f(x)=(x^2+1)e^{-x}, \qquad f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}.$$

2. 함수의 치역과 교점의 개수를 확인합니다

f'는 $x=1$ 이외의 모든 점에서 음수입니다. 어떤 구간에서도 한 점만 제외하고 감소하므로 f는 엄격히 감소합니다. 양 끝의 극한과 $f>0$에서 치역은 $(0,\infty)$이고 $f(x)=t$는 $t>0$일 때 정확히 한 개의 실근을 갖습니다. $x=1$에서의 수평접선은 극값을 주지 않습니다.

3. 절댓값의 미분가능성을 적용합니다

$f(p)=t, f'(p)\neq 0$인 교점에서만 $|t-f|$가 미분가능하지 않습니다. $f(p)=t, f'(p)=0$이면

$$\left|\frac{|t-f(p+u)|}{u}\right| = \left|\frac{f(p+u)-f(p)}{u}\right| \to 0$$

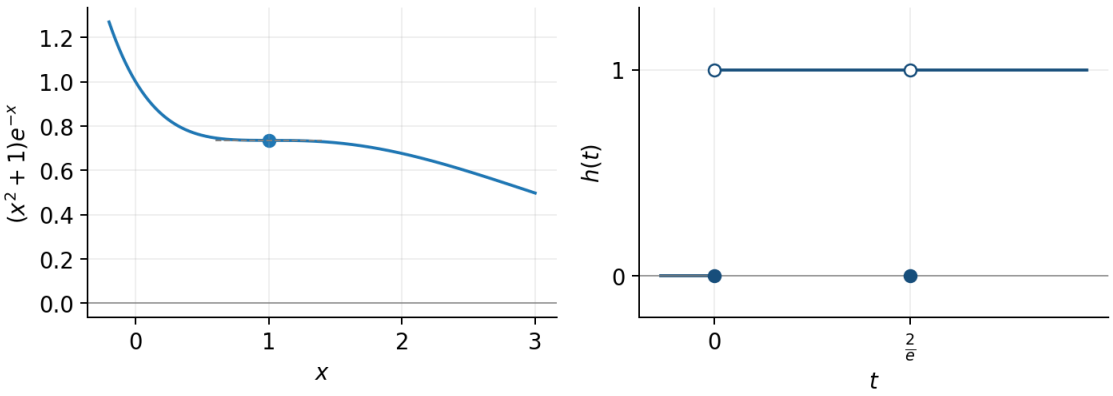
이므로 미분가능합니다. 유일한 수평접점의 높이는 $f(1)=\frac{2}{e}$입니다. 따라서

$$h(t)=\begin{cases} 1 & t>0,\ t\neq\frac{2}{e}, \\ 0 & t\le 0 \text{ 또는 } t=\frac{2}{e}. \end{cases}$$

4. 한 점에서만 값이 다른 경우도 확인합니다

$t=0$에서는 왼쪽 극한 0, 오른쪽 극한 1이 달라 불연속입니다. $t=\frac{2}{e}$에서는 좌우 극한이 모두 1이지만 그 점의 함수값은 0이므로 불연속입니다. 나머지 점에서는 근방에서 h가 일정하므로 연속입니다.

B3-7 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

두 도함수 조건에서 $b=1, a=0$이다. $f'=-(x-1)^2e^{-x}$이므로 f는 엄격히 감소하고 치역은 $(0,\infty)$이다. 양의 높이에는 교점이 하나씩 있으나 $t=f(1)=\frac{2}{e}$에서는 도함수가 0이므로 절댓값도 미분가능하다. 따라서 $h=1\ (t>0, t\neq\frac{2}{e})$이고 그 밖에는 0이다. 불연속점은 0과 $\frac{2}{e}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
두 도함수·계수	4
전구간 증감·치역·교점 유일성	5
절댓값의 미분가능성·h	6
두 종류의 불연속·나머지 연속	5

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

좌우 극한이 같다는 이유만으로 연속이라고 하지 않습니다. 그 점의 함수값도 비교합니다. $f'(1)=0$이지만 극댓값·극솟값은 아닙니다.

정당한 풀이 단축

방정식의 해를 직접 구하지 않고 단조성으로 유일한 교점과 수평접점의 높이만 확인합니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 조건변경·최종 점검. 2026 의예 기출 6번 및 A2-8·B1-8의 미분불가능한 점 개수에서, 수평접선이 극값이 아닌 상황을 설계.

B3-8 해설 · 반복되는 실근과 정수 교점의 최종 리허설

정답 $f(x)=x^3-7x^2+18x-12$, 넓이 $\dfrac{1}{12}$

첫 판단 극한 조건에서 실근의 위치를 제한한 뒤, 두 정수 교점을 중근과 다른 한 근으로 표현합니다.

1. 유일한 실근의 위치를 정합니다

삼차함수는 양 끝의 극한이 반대이므로 적어도 한 개의 실근을 갖습니다. 실근 β에 대해 극한이 유한하려면 $3\beta-2$도 실근이어야 합니다. 이를 반복한 $1+3^n(\beta-1)$이 무한히 서로 다른 근이 될 수 없으므로 $\beta=1$입니다. 따라서 f의 유일한 실근은 1입니다.

2. 정수 교점 조건으로 두 후보를 구합니다

$f(x)-2x$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이고 서로 다른 두 실근을 갖습니다. 따라서 서로 다른 정수 r, s에 대해

$$f(x)-2x=(x-r)^2(x-s)$$

로 쓸 수 있습니다. $f(1)=0$을 대입하면

$$(1-r)^2(1-s)=-2, \qquad (1-r)^2(s-1)=2.$$

0이 아닌 제곱 정수가 2의 약수이므로 $(1-r)^2=1$입니다. 따라서 $r=0$ 또는 2이고 $s=3$입니다.

3. 원래 극한 조건으로 후보를 판정합니다

$r=0$이면 $f=2x+x^2(x-3)=x(x-1)(x-2)$로 실근이 3개여서 모순입니다. $r=2$이면

$$f(x)=2x+(x-2)^2(x-3)=x^3-7x^2+18x-12=(x-1)(x^2-6x+12).$$

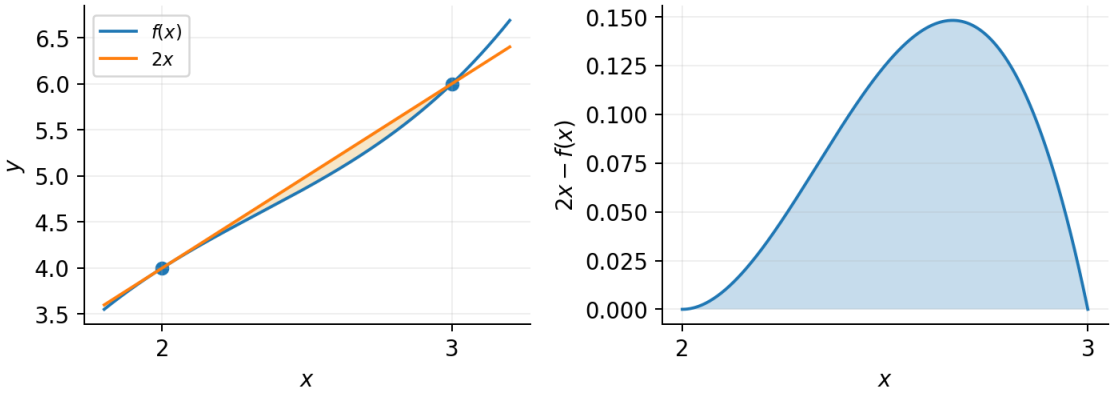
이차인수는 $(x-3)^2+3>0$입니다. 1에서의 비의 극한은 $3\frac{1^2-6+12}{1^2-6+12}=3$이고, 다른 점에서는 분모가 0이 아니므로 모든 원조건을 만족합니다.

4. 두 교점 사이의 위아래를 확인하여 적분합니다

교점은 $x=2,3$이고 그 사이에서 $f(x)-2x=(x-2)^2(x-3)\le 0$입니다. 따라서 넓이는

$$\int_2^3 \{2x-f(x)\}dx=\int_0^1 u^2(1-u)du=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

B3-8 · 답안과 확인



시험장에서 쓸 모범답안

실근 반복에서 f의 유일한 실근은 1이다. $f-2x=(x-r)^2(x-s)$에서 $(1-r)^2(s-1)=2$이므로 $(r,s)=(0,3),(2,3)$이다. 첫 후보는 f에 다른 실근이 생겨 제외되고, 둘째 후보는 $(x-1)(x^2-6x+12)$로 원 조건을 만족한다. 교점 2와 3 사이에서 직선이 위에 있으므로 넓이는 $\int_2^3(x-2)^2(3-x)dx=\frac{1}{12}$이다.

부분점수와 감점 요소

확인할 내용	배점
실근 존재·반복·유일한 위치	5
중근 표현·정수 약수 조건	6
두 후보·충분성·함수식	5
교점·부호·넓이	4

같은 내용을 정당하게 설명한 다른 풀이에도 같은 점수를 부여합니다. 정답만 쓰거나 근거가 빠진 단계에는 그 단계 점수를 부여하지 않습니다.

실수하기 쉬운 부분

극한 조건은 $f(x)$의 실근을 제한하며 $f(x)-2x$의 실근을 직접 제한하는 조건이 아닙니다. 두 다항식의 실근을 혼동하지 않습니다.

정당한 풀이 단축

정수 교점과 $f(1)=0$을 먼저 사용하면 세 계수를 연립방정식으로 전개하지 않고 후보 두 개로 줄일 수 있습니다.

기존 교재 연결과 출처

신규 직접변형·물음 확장. 2027 의예 모의 4번의 유한한 극한·정수 교점 구조에서 변환의 고정점과 직선 기울기를 바꾸고 함수식도 요구.