2027학년도 / 약술형논술 수학

강남대

공학

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BlueMath · 강남대학교 공학계 수학집중형

최종점검3 신규 후보 제1회 · ENG

응시 안내

시간 60분 · 수학 10문항 · 자체 연습배점 100점. 문제별 풀이 과정이 필요합니다. **공식 대학 시험지와 다릅니다.** 실제 강남대학교는 국어+수학 10문항이며, 이 연습에서는 선생님 운영 기준에 따라 국어 문항을 전부 수학으로 대체했습니다. 시험의 수학 유형과 고교교육과정 범위를 참고하되 공식문항을 복제하지 않았습니다. 검정색 볼펜으로 답안을 작성하는 연습을 권장합니다.

문항 01 · 8점

실수 $a>1$에 대하여 닫힌구간 $[0,2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\log_2\left(\frac{x+a}{x+1}\right)$$

의 최댓값과 최솟값의 차가 1이다. 상수 a의 값을 구하고, 최댓값과 최솟값을 갖는 x의 값을 각각 서술하시오.

문항 02 · 8점

함수 $f(x)=2+3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$의 최소 양의 주기를 구하고, 닫힌구간 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서의 최댓값 및 그 값을 갖는 x의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

문항 03 · 10점

삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$의 그래프 위의 두 점 $(0,f(0))$, $(3,f(3))$을 지나는 직선을 ℓ이라 하자. $0<a<3$이고 $x=a$에서의 접선이 ℓ과 평행할 때, a의 값과 그 접선의 방정식을 구하는 과정을 서술하시오.

문항 04 · 10점

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 한다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = un^2 + vn$$

이고 $a_3 = 5$, $a_8 = -5$이다. 양수인 항을 모두 더한 값을 구하고, 양수인 항이 몇 개인지 그 근거를 서술하시오.

문항 05 · 10점

함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & (x < 1), \\ bx + c & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 $x = 1$에서 미분가능하고 $f(2) = 5$이다. a, b, c의 값을 구한 다음 $f(-1)$을 구하는 과정을 서술하시오.

문항 06 · 12점

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$에 대하여 $0 \leq t \leq 2$에서

$$g(t) = \int_{2-t}^{2+t} f(x)\,dx$$

라 하자. 이 구간에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하고, 두 값의 차를 구하는 과정을 서술하시오.

문항 07 · 12점

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=0, \qquad f'(1)=0, \qquad f(4)=0$$

을 만족시킨다. $f(x)$를 구하고, 다음 정적분의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

$$\int_{1}^{4} |f(x)|\,dx$$

문항 08 · 10점

실수 x가 다음 방정식을 만족시킨다.

$$\log_2(x-1)+\log_2(5-x)=1.$$

이 방정식의 모든 실수해를 구하고, 해의 합을 구하는 과정을 서술하시오.

문항 09 · 10점

$a \ge 0$인 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[0,4]$에서 방정식

$$|x^2-4x+3|=a$$

가 서로 다른 실근을 정확히 3개 갖도록 하는 모든 a의 값을 구하고, 그 이유를 서술하시오.

문항 10 · 10점

$0 \le t \le 2$에서

$$F(t) = \int_{-t}^{t} |x(x^2 - 4)|\, dx$$

라 하자. 방정식 $F(t) = 6$을 만족시키는 모든 t의 값을 구하고, 해의 개수가 하나임을 설명하시오.

이 자료는 BlueMath 독립 제작 예상 모의고사로, 강남대학교 공식 기출문제나 공식 채점표가 아닙니다. 학생용으로는 출처를 문항별

노출하지 않았습니다.

BlueMath · 강남대학교 공학계 수학집중형

최종점검3 신규 후보 제1회 · ENG

해설편 사용법

각 문항은 **출발점 → 정석풀이 → 검산 → 숏컷·감점 주의** 순으로 설명합니다. 교사용 권장 배점과 풀이시간은 BlueMath 자체 추정이며 공식 채점기준이 아닙니다. 서술형 답안에는 조건 판단과 결론의 근거를 꼭 포함하세요.

문항 01 · 8점 · 로그함수와 매개변수

정답 $a=4$. 최댓값은 $x=0$, 최솟값은 $x=2$에서 갖습니다.

첫 판단. 로그의 밑이 $2>1$이므로 로그 안의 분수의 증감부터 보면 됩니다. $a>1$이므로

$$\frac{x+a}{x+1}=1+\frac{a-1}{x+1}.$$

$0\le x\le 2$에서 $x+1$은 증가하고 $a-1>0$이므로 이 분수는 감소합니다. 따라서 $f(x)$도 감소하여 최댓값은 $x=0$, 최솟값은 $x=2$에서 갖습니다.

$$M=f(0)=\log_2 a,\qquad m=f(2)=\log_2\frac{a+2}{3}.$$

조건 $M-m=1$에 로그의 성질을 적용하면

$$\log_2\frac{3a}{a+2}=1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{3a}{a+2}=2.$$

양변에 $a+2>0$을 곱하여 $3a=2a+4$, 곧 $a=4$를 얻습니다. 실제로 $a=4>1$이고 두 끝점에서 각각 최댓값과 최솟값을 가지므로 원래 조건을 만족합니다. **시험장 숏컷.** 두 로그의 차를 하나의 로그로 묶기 전에 분수 $1+(a-1)/(x+1)$가 감소함을 확인하면 미분 없이 풀 수 있습니다. **감점 주의.** 최댓값과 최솟값을 어느 점에서 얻는지 근거 없이 쓰면 안 됩니다.

문항 02 · 8점 · 삼각함수의 주기와 최댓값

정답 최소 양의 주기 π, 최댓값 5 $(x=\pi/12)$.

첫 판단. 사인함수 $\sin\theta$는 각이 2π만큼 증가하면 같은 값을 갖습니다. 여기서는 각이 $2x+\pi/3$이므로 x가 π만큼 증가하면 각이 2π만큼 증가합니다. 따라서 최소 양의 주기는 $\boxed{\pi}$입니다. 사인의 값은 언제나 -1 이상 1 이하이므로 $f(x)\le 2+3=5$입니다. 이 최댓값을 실제 구간에서 가질 수 있는지 확인해야 합니다.

$$\sin\!\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right)=1\quad\Longleftrightarrow\quad 2x+\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

따라서 $x=\pi/12+k\pi$이며 $0\le x\le \pi/2$에 해당하는 것은 $k=0$일 때의 $x=\pi/12$뿐입니다. 이때 함수값이 실제로 5가 되므로 최댓값은 $\boxed{5}$입니다. **감점 주의.** 수식만으로 상한을 찾았다면 그 값을 해당 구간에서 실제로 얻는지도 확인해야 합니다.

문항 03 · 10점 · 할선과 접선의 기울기

정답 $a=2$, 접선은 $y=x-4$.

첫 판단. 접선이 ℓ과 평행하려면 두 직선의 기울기가 같아야 합니다. 먼저 주어진 두 점에서

$$f(0)=0, \qquad f(3)=27-27+3=3$$

이므로 ℓ의 기울기는 $(3-0)/(3-0)=1$입니다. 한편

$$f'(x)=3x^2-6x+1.$$

접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$$3a^2-6a+1=1 \quad\Longleftrightarrow\quad 3a(a-2)=0.$$

후보 $a=0,2$ 중 $0<a<3$을 만족하는 것은 $a=2$뿐입니다. 그때 $f(2)=8-12+2=-2$이므로

$$y-(-2)=1(x-2), \qquad \boxed{y=x-4}.$$

검산. 접선의 기울기가 1이고 접점 $(2,-2)$를 지납니다. **숏컷.** 할선의 기울기 1을 구하면 이 식은 $3a(a-2)=0$으로 곧바로 인수분해됩니다. $a=0$은 구간 조건 때문에 버려야 합니다. **감점 주의.** 접점의 x좌표만 구하고 접선의 방정식을 빠뜨리지 마세요.

문항 04 · 10점 · 수열의 합으로부터 부호 판정

정답 양수인 항은 5개이고 합은 25.

첫 판단. 일반항과 부분합은 $a_n=S_n-S_{n-1}$으로 연결됩니다. $n\ge 2$에서

$$a_n=u\big(n^2-(n-1)^2\big)+v\big(n-(n-1)\big)=u(2n-1)+v.$$

$n=1$에서도 $a_1=S_1=u+v$이므로 같은 식이 성립합니다. 주어진 두 항을 대입하면

$$5u+v=5, \qquad 15u+v=-5.$$

두 식을 빼서 $10u=-10$, 따라서 $u=-1$, $v=10$입니다. 그러므로

$$\boxed{a_n=11-2n}.$$

양수인 항은 $11-2n>0$, 곧 자연수 $n<11/2$에 해당하므로 $n=1,2,3,4,5$의 다섯 개입니다.

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=9+7+5+3+1=\boxed{25}.$$

이는 $S_5=-5^2+10\cdot 5=25$로도 확인됩니다. **숏컷.** 양수인 항의 마지막 번호가 5임을 확인했다면 항을 하나씩 더하지 않고 S_5를 쓰면 계산을 줄일 수 있습니다. **감점 주의.** $a_n>0$의 경계 $n=5.5$를 자연수 번호로 옮길 때 $n=6$을 포함하지 마세요.

문항 05 · 10점 · 연속성과 미분가능성의 연결

정답 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}, c=0, f(-1)=\frac{3}{2}$.

첫 판단. $x=1$에서 미분가능하다면 연속이어야 하고, 좌우에서 구한 미분계수도 같아야 합니다. 이 두 조건을 따로 쓰는 것이 핵심입니다. 연속 조건은

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1+a+1 = 2+a, \quad f(1)=b+c$$

이므로

$$2+a=b+c. \tag{1}$$

왼쪽 식의 도함수는 $2x+a$, 오른쪽 식의 도함수는 b이므로 미분가능 조건은

$$2+a=b. \tag{2}$$

(1), (2)로부터 $c=0$을 얻습니다. 또 $2\ge 1$이므로 $f(2)=2b+c=5$이고 $b=5/2$입니다. 따라서

$$a=b-2=\frac{1}{2}, \qquad c=0.$$

마지막으로 $-1<1$이므로 첫째 식을 사용해

$$f(-1)=(-1)^2+\tfrac{1}{2}(-1)+1=\boxed{\tfrac{3}{2}}.$$

검산. 왼쪽에서의 함숫값과 오른쪽에서의 함숫값은 둘 다 $5/2$, 좌우 기울기도 모두 $5/2$입니다. **감점 주의.** 연속 조건 하나만으로 미분가능성을 판단하거나, $f(-1)$에 오른쪽 식을 쓰면 안 됩니다.

문항 06 · 12점 · 움직이는 적분구간과 최댓값·최솟값

정답 최댓값 $\frac{4}{3}$ $(t=2)$, 최솟값 $-\frac{4}{3}$ $(t=1)$, 차 $\frac{8}{3}$.

첫 판단. 적분구간의 양 끝이 2를 중심으로 대칭입니다. $x=2+u$로 치환하면 계산이 쉬워집니다. 실제로

$$f(2+u)=(2+u)^2-4(2+u)+3=u^2-1.$$

따라서 적분구간이 $[-t,t]$로 바뀌고,

$$g(t)=\int_{-t}^{t}(u^2-1)\,du=2\int_{0}^{t}(u^2-1)\,du=\frac{2}{3}t^3-2t.$$

최댓값·최솟값은 닫힌구간의 끝점과, 내부에서 도함수가 0인 점을 대조해야 합니다.

$$g'(t)=2t^2-2=2(t-1)(t+1).$$

$0<t<1$에서 감소하고 $1<t<2$에서 증가하므로 $t=1$에서 가장 작습니다. 세 후보의 값은

$$g(0)=0, \qquad g(1)=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}, \qquad g(2)=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}.$$

따라서 $M=4/3, m=-4/3$이고

$$\boxed{M-m=\frac{8}{3}}.$$

시험장 숏컷. 피적분함수를 $(x-2)^2-1$로 먼저 정리하면 대칭구간의 성질을 바로 쓸 수 있습니다. **감점 주의.** $g'(t)=0$인 점만 보고 최댓값을 결정하지 말고 $t=0,2$도 반드시 비교해야 합니다.

문항 07 · 12점 · 이중근과 정적분의 넓이

정답 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$, 정적분값 $\frac{27}{4}$.

첫 판단. $f(1)=0$이므로 $x-1$이 인수이고, $f'(1)=0$까지 만족하므로 $x-1$이 두 번 곱해진 인수입니다. 또한 $f(4)=0$이므로 $x-4$도 인수입니다. 최고차항 계수가 1이고 삼차함수이므로

$$\boxed{f(x)=(x-1)^2(x-4)}.$$

이제 $1\le x\le 4$에서 $(x-1)^2\ge 0$, $x-4\le 0$이므로 $f(x)\le 0$입니다. 따라서 절댓값을 벗기면

$$|f(x)|=(x-1)^2(4-x).$$

$t=x-1$로 치환하면 $x=1$에서 $t=0$, $x=4$에서 $t=3$이고

$$\begin{aligned}\int_1^4 |f(x)|\,dx &= \int_0^3 t^2(3-t)\,dt\\ &= \left[t^3-\frac{t^4}{4}\right]_0^3 = 27-\frac{81}{4}=\boxed{\frac{27}{4}}.\end{aligned}$$

숏컷. 이중근 조건으로 함수를 먼저 인수분해하면 그래프에서 부호가 바뀌는 지점은 $x=4$뿐임을 바로 확인할 수 있습니다. **감점 주의.** 적분 안의 절댓값을 근거 없이 제거하지 마세요.

문항 08 · 10점 · 로그방정식의 정의역과 두 해

정답 $x=3\pm\sqrt{2}$, 모든 실수해의 합 6.

첫 판단. 로그 안의 수가 모두 양수여야 하므로

$$x-1>0,\quad 5-x>0 \iff 1<x<5.$$

그 범위에서 로그의 성질을 적용하면

$$\log_2((x-1)(5-x))=1 \iff (x-1)(5-x)=2.$$

전개하여 $-x^2+6x-5=2$이므로 $x^2-6x+7=0$입니다.

$$(x-3)^2=2 \iff \boxed{x=3\pm\sqrt{2}}.$$

$1<3-\sqrt{2}<3+\sqrt{2}<5$이므로 두 해가 모두 정의역에 있습니다. 따라서 합은 $\boxed{6}$입니다. **감점 주의.** 다항방정식의 해를 구한 뒤 로그의 정의역을 확인하지 않으면 불필요한 해를 남길 수 있습니다.

문항 09 · 10점 · 절댓값 그래프의 교점 개수

정답 $a = 1$.

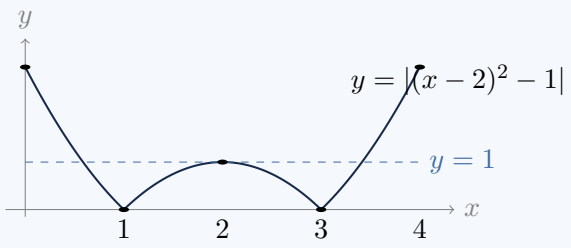
첫 판단. $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$로 고쳐 쓰면 $0 \le x \le 4$에서 그래프의 변화를 쉽게 알 수 있습니다. 주어진 방정식은

$$(x-2)^2 - 1 = a \qquad \text{또는} \qquad (x-2)^2 - 1 = -a$$

의 해를 모은 것입니다. 첫째 식은 $(x-2)^2 = 1 + a$입니다. $a = 0$부터 3까지는 서로 다른 해 $2 \pm \sqrt{1+a}$가 모두 $[0, 4]$에 있고, $a > 3$이면 해당 구간에 해가 없습니다. 둘째 식은 $(x-2)^2 = 1 - a$입니다. $0 \le a < 1$이면 서로 다른 해 두 개, $a = 1$이면 $x = 2$ 한 개, $a > 1$이면 해가 없습니다. $a = 0$에서는 두 식이 같은 식이므로 해가 중복되어 2개뿐입니다. $0 < a < 1$에는 각 식에서 두 개씩, 총 4개입니다. $a = 1$이면 첫째 식의 두 해 $2 \pm \sqrt{2}$와 둘째 식의 해 $x = 2$가 있어 정확히 3개입니다. $1 < a \le 3$이면 두 개, $a > 3$이면 없으므로

$$\boxed{a = 1}.$$

숏컷. 절댓값 그래프 $y = |(x-2)^2 - 1|$의 가운데 봉우리가 높이 1이라는 사실을 보면, 수평선이 그래프에 세 점에서 만나는 것은 $a = 1$뿐입니다.



감점 주의. $a = 0$일 때 두 방정식이 같은 해를 만드는 것을 중복 계산하지 마세요.

문항 10 · 10점 · 짝함수 성질을 이용한 정적분 방정식

정답 $t=\sqrt{2}$ 한 개.

첫 판단. $|x(x^2-4)|$는 x의 부호를 바꾸어도 값이 같으므로 $[-t,t]$의 적분은 $[0,t]$ 적분의 두 배입니다. 또 $0\le x\le t\le 2$에서는 $x^2-4\le 0$이므로

$$|x(x^2-4)| = 4x-x^3.$$

따라서

$$F(t)=2\int_0^t (4x-x^3)\,dx = 2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^t = 4t^2-\frac{t^4}{2}.$$

$F(t)=6$이면 양변에 2를 곱해

$$t^4-8t^2+12=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t^2-2)(t^2-6)=0.$$

$0\le t\le 2$이므로 $0\le t^2\le 4$이고 $t^2=6$은 불가능합니다. 따라서 $\boxed{t=\sqrt{2}}$만 남습니다. **추가 검산.** $F'(t)=2t(4-t^2)>0$ $(0<t<2)$이므로 F가 증가하고 해가 하나임을 다시 확인할 수 있습니다. **감점 주의.** $t^2=6$에서 형식적인 해 $\sqrt{6}$을 답에 포함시키지 마세요.

본 해설의 점수는 연습용입니다. 실제 대학은 공식 채점기준·지정 답안지 사용 유의사항을 따라야 합니다.