2027학년도 / 수리논술

아주대

자연

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제01회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

아주대학교 자연계열
B1 · 문제·답안지

부등식으로 구하는 극한과 격자 계산

논술우수자전형 · 일반 자연 · 수원

120분 · 수리논술 대문항 2개 · 연습 배점 100점

수학 · 수학 I · 수학 II · 미적분

2026년 12월 5일 09:00: 공과대학·자연과학대학·자유전공학부(자연)

2026년 12월 5일 14:00: 첨단ICT융합대학·소프트웨어융합대학

두 시간대에 공통으로 활용하는 대비 원고입니다. 실제 고사장의 문제지가 같다는 뜻은 아닙니다.

기출·기존 변형 3회 + 신규 예상 3회

이 파일은 최종 A1–A3+B1–B3 중 B1입니다. 핵심 발상 안내와 전날 점검표를 함께 활용하세요. 약학 및 의학 전용 자료는 별도 편성합니다.

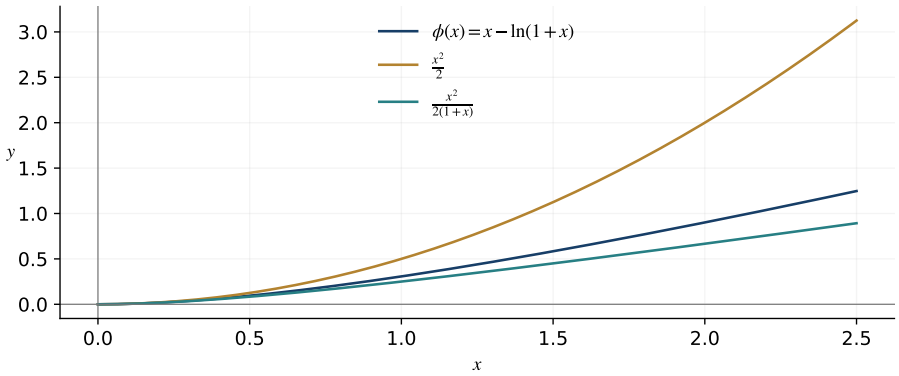
최민구 T · BlueMath

공식 답안 기준은 대문항당 A3 한 면입니다. 이 연습지는 A4 두 면으로 나누어 제공합니다. 배점·예상 소요시간은 연습용이며 학생 실측은 실시하지 않았습니다.

문항 1 50점

로그함수와 적분의 크기 비교

$x \geq 0$에서 $\phi(x) = x - \ln(1+x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 방정식 $\phi(x) = \dfrac{1}{n}$의 양의 실근을 u_n이라 한다.



로그함수와 두 비교함수. 모두 0에서 만나고 양의 구간에서 엄격한 부등식이 성립한다.

1-1 · 8점

각 자연수 n에 대하여 u_n이 존재하고 유일함을 보이시오.

1-2 · 12점

모든 $x \geq 0$에서

$$\frac{x^2}{2(1+x)} \leq \phi(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

임을 보이고 각 등호가 성립하는 x를 구하시오.

1-3 · 14점

$u_n \to 0$임을 보이고 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u_n$을 구하시오.

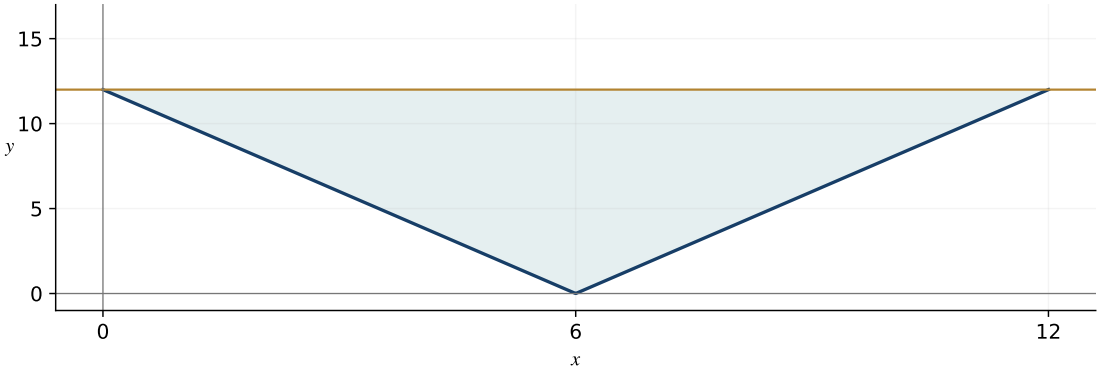
1-4 · 16점

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \displaystyle\int_0^{u_n} \phi(x)\, dx$를 구하시오.

문항 2 50점

정수점과 삼각형의 격자 덮개

음이 아닌 정수 p에 대하여 $g_p(x) = |(x-p)^2 - 9|$라 하자. $j = 0, 1, \ldots, 12$ 중 $g_p(j) > k$인 정수의 개수를 b_k, $g_p(j) \le k$인 개수를 c_k라 하고 $a_k = b_k - c_k$라 한다. $h_p(x) = 2|x-p|$와 $y = 12$로 둘러싸인 도형에 대해, 원점 기준 격자에서 제1사분면의 정사각형 중 내부가 도형과 겹치는 칸을 색칠한다. 변·꼭짓점만 닿는 칸은 제외한다.



$p = 6$인 설명용 도형. 실제 물음의 매개변수는 조건에서 따로 결정한다.

2-1 · 10점

$p = 6$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} a_k$를 구하시오.

2-2 · 12점

$a_{15} < 0$인 정수 p를 모두 구하시오.

2-3 · 12점

앞 조건을 만족하는 가장 작은 p에서 한 변이 1인 색칠한 정사각형의 개수를 구하시오.

2-4 · 16점

같은 p에서 한 변이 $\dfrac{1}{n}$인 색칠한 정사각형의 개수를 d_n이라 하자. d_n을 구하고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n^2}$을 구하시오.

B1 문항 1 · 답안 1면

이름 _____

B1 문항 1 · 답안 2면

이름 _____

B1 문항 2 · 답안 1면

이름 _____

B1 문항 2 · 답안 2면

이름 _____

아주대학교 자연계열
B1 · 상세해설

부등식으로 구하는 극한과 격자 계산

논술우수자전형 · 일반 자연 · 수원

120분 · 수리논술 대문항 2개 · 연습 배점 100점

수학 · 수학 I · 수학 II · 미적분

2026년 12월 5일 09:00: 공과대학·자연과학대학·자유전공학부(자연)

2026년 12월 5일 14:00: 첨단ICT융합대학·소프트웨어융합대학

두 시간대에 공통으로 활용하는 대비 원고입니다. 실제 고사장의 문제지가 같다는 뜻은 아닙니다.

기출·기존 변형 3회 + 신규 예상 3회

이 파일은 최종 A1–A3+B1–B3 중 B1입니다. 핵심 발상 안내와 전날 점검표를 함께 활용하세요. 약학 및 의학 전용 자료는 별도 편성합니다.

최민구 T · BlueMath

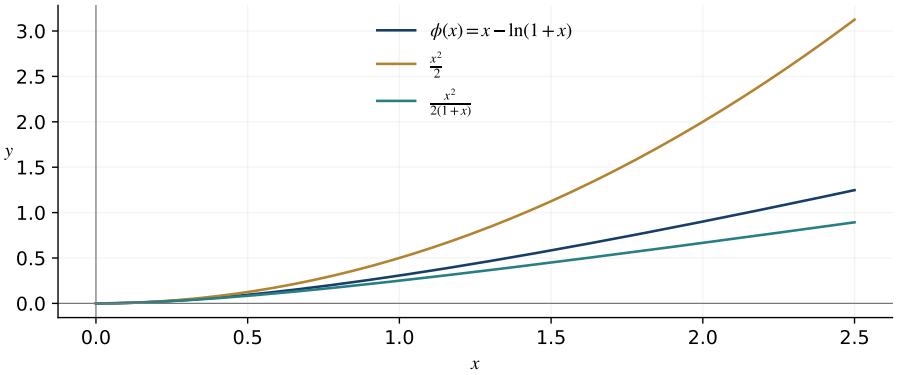
공식 답안 기준은 대문항당 A3 한 면입니다. 이 연습지는 A4 두 면으로 나누어 제공합니다. 배점·예상 소요시간은 연습용이며 학생 실측은 실시하지 않았습니다.

문항 1 50점

로그함수와 적분의 크기 비교

연결 · BlueMath 신규 예상 · 2027 모의 문항 1의 곡선 넓이 비교와 수열 극한을 새 함수로 재구성.

$x \geq 0$에서 $\phi(x) = x - \ln(1+x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 방정식 $\phi(x) = \dfrac{1}{n}$의 양의 실근을 u_n이라 한다.



로그함수와 두 비교함수. 모두 0에서 만나고 양의 구간에서 엄격한 부등식이 성립한다.

B1 · 1-1

각 자연수 n에 대하여 u_n이 존재하고 유일함을 보이시오.

1. 증가와 값의 범위를 확인합니다

$\phi(0)=0, x>0$에서 $\phi'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$이다. 또한 $x\ge 1$에서 $\phi'(x)\ge\dfrac{1}{2}$이므로 평균값 정리로 $\phi(x)\ge\phi(1)+\dfrac{x-1}{2}$이다. 따라서 $\phi(x)\to\infty$.

2. 연속성과 엄격한 증가를 나누어 사용합니다

연속인 ϕ는 0에서 0이고 한없이 커지므로 중간값 정리에 의해 양수 $\dfrac{1}{n}$을 한 번 이상 갖는다. 양의 구간에서 엄격히 증가하므로 두 번 가질 수 없다.

수리논술 모범답안

$\phi(0)=0, \phi'(x)>0\ (x>0), \phi(x)\to\infty$이므로 중간값 정리와 증가성에 의해 u_n은 존재하고 유일하다.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
도함수와 증가	3
무한대로 커짐	3
존재·유일성	2

감점·조건 점검

증가함수라는 사실만으로 모든 양수값을 갖는다고 단정하지 않는다.

B1 · 1-2

모든 $x \geq 0$에서

$$\frac{x^2}{2(1+x)} \leq \phi(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

임을 보이고 각 등호가 성립하는 x를 구하시오.

1. 함수를 도함수의 적분으로 표현합니다

$\phi(0) = 0$이므로 $\phi(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$이다. $0 \leq t \leq x$에서 $\frac{t}{1+x} \leq \frac{t}{1+t} \leq t$이다.

2. 부등식을 적분하고 등호를 따집니다

적분하면 원하는 두 부등식을 얻는다. $x > 0$에서는 $0 < t < x$인 모든 점에서 두 부등식이 엄격하므로 적분의 두 부등식도 엄격하다. $x = 0$일 때만 양쪽 등호가 성립한다.

수리논술 모범답안

$\frac{t}{1+x} \leq \frac{t}{1+t} \leq t$를 0부터 x까지 적분하여 제시한 부등식을 얻는다. $x > 0$에서는 내부에서 엄격한 부등식이므로 각 등호는 $\boxed{x = 0}$일 때만 성립한다.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
적분 표현과 점별 비교	5
적분값 계산	4
등호 조건	3

감점·조건 점검

분모의 크기 비교를 할 때 분자 t가 음이 아님을 사용한다.

B1 · 1-3

$u_n \to 0$임을 보이고 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,u_n$을 구하시오.

1. 이차부등식으로 수열의 상계를 구합니다

앞 소문항의 왼쪽 부등식에 $x = u_n > 0$을 대입하면 $nu_n^2 \le 2(1+u_n)$이다. 자연수 $n \ge 1$이므로 이를 $nu_n^2 - 2u_n - 2 \le 0$으로 정리하고 이차방정식의 두 근을 구하면 $\dfrac{1-\sqrt{1+2n}}{n} < 0 < \dfrac{1+\sqrt{1+2n}}{n}$이다. 따라서

$$0 < u_n \le \frac{1+\sqrt{1+2n}}{n} = \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}.$$

오른쪽은 $n \to \infty$일 때 0으로 가므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $u_n \to 0$이다. 수렴을 미리 가정할 필요가 없다.

2. 앞 부등식에 수열을 대입합니다

$$\frac{u_n^2}{2(1+u_n)} \le \frac{1}{n} \le \frac{u_n^2}{2}$$

이므로 $2 \le nu_n^2 \le 2(1+u_n)$. 양끝은 2로 가므로 $nu_n^2 \to 2$. $u_n > 0$이므로 $\sqrt{n}u_n \to \sqrt{2}$이다.

수리논술 모범답안

앞 부등식에서 $nu_n^2 - 2u_n - 2 \le 0$이고 $u_n > 0$이므로 $0 < u_n \le \dfrac{1}{n} + \sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}} \to 0$. 이후 $2 \le nu_n^2 \le 2(1+u_n)$에서 $\boxed{\sqrt{n}u_n \to \sqrt{2}}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
이차부등식과 양의 상계	4
극한 0	4
비교와 최종 극한	6

감점·조건 점검

구하려는 극한을 먼저 가정하여 $u_n \to 0$을 설명하면 논리가 순환한다.

B1 · 1-4

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \int_0^{u_n} \phi(x)\,dx$를 구하시오.

1. 적분구간 전체에서 같은 분모를 씁니다

$0 \le x \le u_n$에서 $\frac{x^2}{2(1+u_n)} \le \phi(x) \le \frac{x^2}{2}$이다. 아래쪽 분모를 $1+x$ 대신 더 큰 $1+u_n$으로 바꾸어 적분하기 쉽게 만든다.

2. 세제곱 크기를 앞 극한과 연결합니다

적분하면

$$\frac{u_n^3}{6(1+u_n)} \le \int_0^{u_n} \phi(x)\,dx \le \frac{u_n^3}{6}.$$

$n^{\frac{3}{2}}$을 곱한 양끝은 각각 $\frac{(\sqrt{n}u_n)^3}{6(1+u_n)}$, $\frac{(\sqrt{n}u_n)^3}{6}$이고 둘 다 $\frac{\sqrt{2}}{3}$으로 간다.

수리논술 모범답안

$\frac{u_n^3}{6(1+u_n)} \le \int_0^{u_n} \phi(x)\,dx \le \frac{u_n^3}{6}$에 $n^{\frac{3}{2}}$을 곱한다. $u_n \to 0$, $\sqrt{n}u_n \to \sqrt{2}$를 적용하면 답은 $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
구간 전체 부등식	5
적분	5
앞 결과를 이용한 극한	6

감점·조건 점검

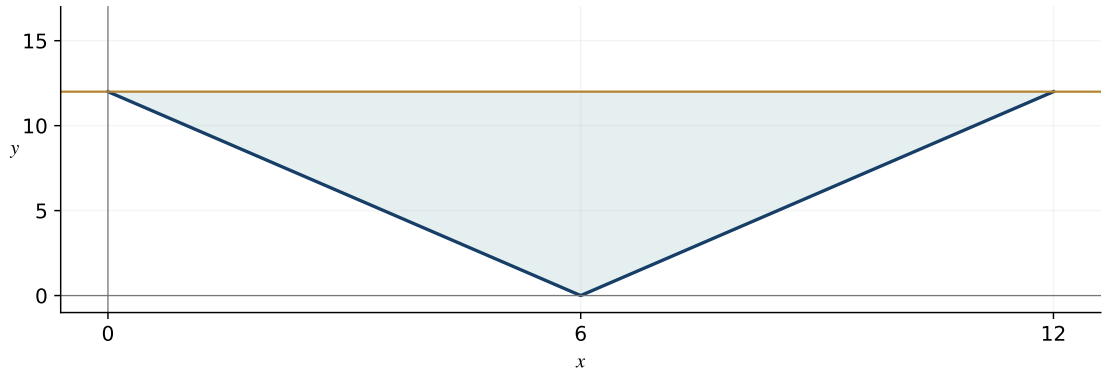
고교 과정 밖의 급수 전개를 쓰지 않아도 비교만으로 극한을 결정할 수 있다.

문항 2 50점

정수점과 삼각형의 격자 덮개

연결 · BlueMath 신규 예상 · 2027 수정 모의 문항 2의 개수·넓이 연결을 작은 상수와 새로운 선형 그래프로 재현.

음이 아닌 정수 p에 대하여 $g_p(x) = |(x-p)^2 - 9|$라 하자. $j = 0, 1, \ldots, 12$ 중 $g_p(j) > k$인 정수의 개수를 b_k, $g_p(j) \le k$인 개수를 c_k라 하고 $a_k = b_k - c_k$라 한다. $h_p(x) = 2|x-p|$와 $y = 12$로 둘러싸인 도형에 대해, 원점 기준 격자에서 제1사분면의 정사각형 중 내부가 도형과 겹치는 칸을 색칠한다. 변·꼭짓점만 닿는 칸은 제외한다.



$p = 6$인 설명용 도형. 실제 물음의 매개변수는 조건에서 따로 결정한다.

B1 · 2-1

$p=6$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} a_k$를 구하시오.

1. 가로좌표보다 중심에서의 거리를 사용합니다

거리 $d=|j-6|=0,1,\dots,6$에서 함수값은 $9,8,5,0,7,16,27$이다. 거리 0은 한 번, 나머지는 두 번 나타난다.

2. 각 정수점이 세어지는 횟수를 합합니다

값 $9,8,5,0,7,16,27$인 점은 각각 $k=1,\dots,15$에서 $7,8,11,15,9,0,0$번 c_k에 들어간다. 따라서 $\sum c_k = 7+2(8+11+15+9)=93$. $a_k=13-2c_k$이므로 합은 $195-186=9$이다.

수리논술 모범답안

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} c_k = 93$이고 $a_k=13-2c_k$이므로 $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{15} a_k = 9}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
거리별 함수값과 중복 수	4
93 계산	4
답 9	2

감점·조건 점검

함수값 0인 점은 16번이 아니라 15번 센다. $k=0$은 포함하지 않는다.

B1 · 2-2

$a_{15} < 0$인 정수 p를 모두 구하시오.

1. 거리와 개수를 차례로 바꿉니다

$a_{15} = 13 - 2c_{15} < 0 \iff c_{15} \geq 7$. $g_p(j) \leq 15 \iff (j-p)^2 \leq 24 \iff |j-p| \leq 4$이다.

2. 양끝에 잘리는 경우를 빠짐없이 나눕니다

$$c_{15} = \begin{cases} p+5 & 0 \leq p \leq 4, \\ 9 & 5 \leq p \leq 8, \\ 17-p & 9 \leq p \leq 16, \\ 0 & p \geq 17. \end{cases}$$

따라서 $p = 2, 3, \ldots, 10$이다.

수리논술 모범답안

$[0, 12] \cap [p-4, p+4]$에 정수가 7개 이상 있어야 한다. 구간별로 세면 $\boxed{p = 2, 3, \ldots, 10}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
개수 조건	3
거리 조건	3
구간 분류와 답	6

감점·조건 점검

$\sqrt{24}$를 5로 올려 정수 범위를 넓히지 않는다.

B1 · 2-3

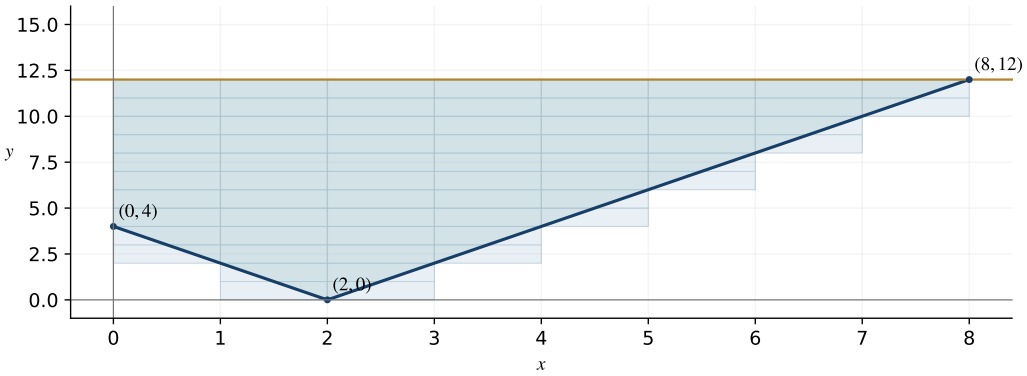
앞 조건을 만족하는 가장 작은 p에서 한 변이 1인 색칠한 정사각형의 개수를 구하시오.

1. 제1사분면의 가로 범위를 찾습니다

$p=2$, $h_2(x)=2|x-2|$. $h_2(x)=12$의 해는 $-4, 8$이므로 색칠 대상은 $0<x<8$이다.

2. 각 단위 띠의 최저 높이를 구합니다

왼쪽 끝이 $0, 1, \ldots, 7$인 띠의 최저 높이는 $2, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10$이다. 칸 수는 $10, 12, 12, 10, 8, 6, 4, 2$이므로 합은 64이다.



$p=2, \ell=1$인 설명용 덮개. 가로 범위는 0부터 8이다.

수리논술 모범답안

8개 띠의 색칠 수를 합하면 $10+12+12+10+8+6+4+2=\boxed{64}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
p와 가로 범위	4
띠별 개수	6
합	2

감점·조건 점검

왼쪽 교점 -4부터 세면 제1사분면 조건을 어긴다.

B1 · 2-4

같은 p에서 한 변이 $\frac{1}{n}$인 색칠한 정사각형의 개수를 d_n이라 하자. d_n을 구하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n^2}$을 구하시오.

1. 실제 도형의 넓이를 먼저 계산합니다

0부터 2까지 위아래 차는 8에서 12로 증가하고, 2부터 8까지는 12에서 0으로 감소한다. 넓이는 $\frac{2(8+12)}{2}+\frac{6\cdot 12}{2}=56$이다.

2. 한 띠에서 더해지는 삼각형을 계산합니다

폭 $\frac{1}{n}$인 띠의 양끝 높이 차는 $\frac{2}{n}$이다. 꼭짓점 $x=2$는 격자선이므로 모든 띠에서 직선 하나만 지나며, 색칠한 칸의 아래 경계는 띠의 최저 높이와 같다. 각 띠는 실제 도형보다 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{n^2}$만큼 넓다.

3. 띠 수를 곱하고 극한을 구합니다

띠는 $8n$개이므로 $\frac{d_n}{n^2}=56+\frac{8}{n}$. 따라서 $d_n=56n^2+8n$, 원하는 극한은 56이다. $n=1$에서 64가 되어 앞 결과와도 일치한다.

수리논술 모범답안

실제 넓이 56에 각 띠의 초과 넓이 $\frac{1}{n^2}$를 $8n$번 더하면 $\frac{d_n}{n^2}=56+\frac{8}{n}$. 따라서 $\boxed{d_n=56n^2+8n}$, $\boxed{\lim\frac{d_n}{n^2}=56}$.

부분점수 · 연습용

평가 요소	점수
넓이 56	4
각 띠 초과 삼각형	6
정확한 식과 극한	6

감점·조건 점검

모든 띠의 양끝 높이가 격자선에 놓인다는 사실이 정확한 칸 수 계산에 필요하다.