2027학년도 / 수리논술

인하대

의예

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

B1-1 · 35점

B1 전형 재현 3대문항 · 합계 100점 · 100분

이름: _____ 시작: _____ 종료: _____

$f(u)=u^3-3u$이고 실수 λ, b에 대하여

$$H_{\lambda,b}(x)=f(|x|-1)-\lambda|x|+bx$$

라 하자.

(1) $H_{\lambda,b}$가 실수 전체에서 미분가능하기 위한 λ의 값을 구하시오. [10점]

(2) (1)의 λ와 $b=0$에 대하여 함수의 최솟값과 그때의 모든 x를 구하시오. [10점]

(3) (1)의 λ와 $b=3$에 대하여 함수의 최솟값과 그때의 x를 구하시오. [15점]

풀이 구상

정식 답안은 별도 답안지의 해당 문항 영역에 작성하세요. 풀이 과정과 이유를 문장과 수식으로 함께 적으세요.

B1-2 · 35점

B1 전형 재현 3대문항 · 합계 100점 · 100분
이름: _____ 시작: _____ 종료: _____

$$a_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{5n-1}$$

이라 하자.

(1) $0 < a_n - \ln\frac{5}{2} < \frac{3}{10n}$임을 보이시오. [10점]

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하시오. [15점]

(3) $b_n = \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} + \frac{1}{5n+2} + \frac{1}{5n+3} + \frac{1}{5n+4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$을 구하시오. [10점]

풀이 구상

정식 답안은 별도 답안지의 해당 문항 영역에 작성하세요. 풀이 과정과 이유를 문장과 수식으로 함께 적으세요.

B1-3 · 30점

B1 전형 재현 3대문항 · 합계 100점 · 100분
이름: _____ 시작: _____ 종료: _____

$a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $2^{p-1} \le n < 2^p$인 자연수 p에 대해

$$a_{2n+r} = a_n + \frac{r+1}{2^p} \qquad (r = 0, 1)$$

이다. 자연수 수열 $\{b_k\}$는 $b_k < b_{k+1}$이고, k가 홀수이면 $a_{b_k} < a_{b_{k+1}}$, 짝수이면 $a_{b_k} > a_{b_{k+1}}$이다.

(1) 정수 m이 $0 \le m < 2^{p-1}$을 만족할 때 $a_{2^{p-1}+m} = 2 + \frac{m-1}{2^{p-1}}$임을 보이시오. [10점]

(2) $b_6 = 14$일 때 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$의 개수를 구하시오. [10점]

(3) b_{12}의 최솟값을 구하시오. [10점]

풀이 구상

정식 답안은 별도 답안지의 해당 문항 영역에 작성하세요. 풀이 과정과 이유를 문장과 수식으로 함께 적으세요.

B1-1 · 상세해설

절댓값 합성과 비대칭인 최솟값

첫 판단과 이유

미분가능성은 먼저0의 좌우에서 확인합니다. 그다음 $x=u$와 $x=-u$의 함수값을 비교하면 최솟값을 찾을 쪽을 한 쪽으로 줄일 수 있습니다.

1. 좌우 미분계수와 필요한 값

$f'(-1)=0$이므로 $x=0$에서 왼쪽 미분계수는 $\lambda+b$, 오른쪽은 $-\lambda+b$입니다. 연속성은 모든 매개변수에서 성립하므로 필요충분조건은 $\boxed{\lambda=0}$입니다. 나머지 점에서는 다항식으로 표현되므로 미분가능합니다. 전개하면

$$H_{0,b}(x)=|x|^3-3x^2+2+bx.$$

2. 대칭인 경우의 전체 최소

$b=0$일 때 $u=|x|\ge 0$로 놓으면 $K(u)=u^3-3u^2+2$, $K'(u)=3u(u-2)$입니다. $0<u<2$에서 감소하고 $u>2$에서 증가하므로 $u=2$에서 유일하게 최소입니다. 따라서 최솟값은 $\boxed{-2}$, 이를 이루는 x는 $\boxed{-2,\,2}$입니다. 끝점 $u=0$에서는2입니다.

3. 일차항이 있는 경우의 비교와 최소

$u>0$이면 $H_{0,3}(u)-H_{0,3}(-u)=6u>0$이므로 양의 쪽보다 음의 쪽이 작습니다. 음의 쪽에서

$$J(u)=H_{0,3}(-u)=u^3-3u^2-3u+2,\quad J'(u)=3\{(u-1)^2-2\}.$$

$u\ge 0$에서 $1-\sqrt{2}$는 허용되지 않으므로 J는 $u=1+\sqrt{2}$까지 감소한 뒤 증가합니다. $v=u-1$로 쓰면 $J=v^3-6v-3$이므로

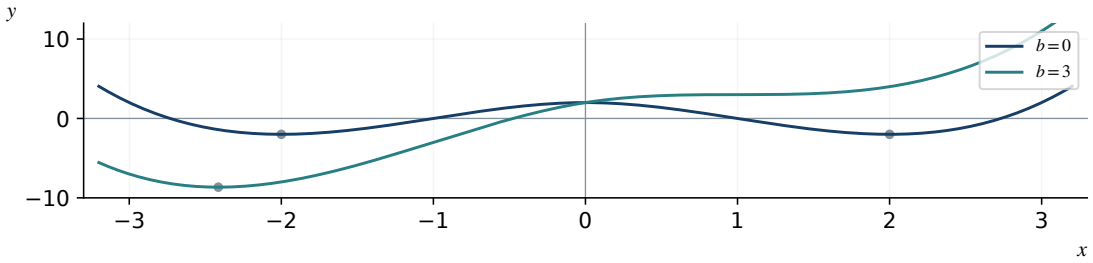
$$\boxed{\min H_{0,3}=-3-4\sqrt{2}},\qquad \boxed{x=-1-\sqrt{2}}.$$

$J(0)=2$도 더 크므로 양끝과 다른 쪽까지 포함한 전체 최소이며 유일합니다.

B1-1 · 답안과 채점

정답

$$\lambda = 0$$
$$\min H_{0,0} = -2 \ (x = \pm 2)$$
$$\min H_{0,3} = -3 - 4\sqrt{2} \ (x = -1 - \sqrt{2})$$



같은 위치의 양쪽 값을 먼저 비교한 뒤 최솟값을 구합니다.

모범답안

좌우 미분계수 $\lambda+b, -\lambda+b$를 같게 하여 $\lambda = 0$이다. $b = 0$에서는 $u = |x|$로 놓고 $u^3 - 3u^2 + 2$의 증감을 보면 $u = 2$에서 최소−2이다. $b = 3$에서는 $H(u) > H(-u)$이므로 음의 쪽만 보면 된다. $J' = 3((u-1)^2 - 2)$에서 최소점 $u = 1 + \sqrt{2}$를 얻고 대입하면 $-3 - 4\sqrt{2}$이다.

부분점수 기준 · 35점

점수	확인할 근거
5점	좌우 미분계수
5점	필요충분조건
6점	대칭 경우의 증감과 끝점
4점	최솟값과 두 위치
5점	양·음 두 쪽의 비교
6점	음의 쪽 최소점
4점	최솟값·유일성

대문항·소문항 배점과 별도로, 위 세부 항목은 BlueMath 연습용 채점 기준입니다. 대학의 미공개 세부 기준을 확정하여 제시한 것이 아닙니다.

감점 요소·정당한 빠른 접근

주의 미분가능하다는 이유로 함수가 짝함수라고 판단하지 않습니다. $b = 3$에서는 두 쪽의 최솟값이 다릅니다.

빠른 접근 양의 위치와 대칭인 음의 위치를 먼저 비교하면 두 삼차식을 모두 미분할 필요가 없습니다.

출처·기존 자료 BlueMath 신규 예상. 2027 의예1의 좌우 미분계수 조건을 유지하고, 일차항이 더해진 함수의 전체 최솟값까지 연결. 기존 의예 UP1 R06-2와 발상 관련.

B1-2 · 상세해설

양끝에서 달라지는 조화합

첫 판단과 이유

왼쪽 직사각형과 오른쪽 직사각형의 차는 맨 앞 항과 맨 뒤 항으로 정리됩니다. 인접한 합의 차에서는 시작 부분의 두 항이 없어지는 점을 확인합니다.

1. 엄격한 부등식

$\dfrac{1}{x}$는 양수 구간에서 엄격히 감소하므로

$$a_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{5n} < \int_{2n}^{5n} \frac{1}{x}\,dx < a_n.$$

적분값은 $\ln \dfrac{5}{2}$이고 두 합의 차는 $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{5n} = \dfrac{3}{10n}$입니다. 따라서 요구한 양쪽 부등식이 성립합니다. 직사각형과 곡선이 내부에서 다르므로 등호는 성립하지 않습니다.

2. 극한의 두 확인 방법

(1)의 상한이0으로 가므로 $\boxed{a_n \to \ln \dfrac{5}{2}}$입니다. 정적분으로 직접 확인하면

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}} \longrightarrow \int_2^5 \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{5}{2}.$$

폭은 $\dfrac{1}{n}$이고 구간 길이는3이므로 항은 $3n$개입니다.

3. 유한합과 초기항

a_{n+1}의 처음 분모는 $2n+2$, 마지막 분모는 $5n+4$입니다. 따라서 $b_n = a_{n+1} - a_n$. $a_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{12}$이므로

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = a_{N+1} - \frac{13}{12} \longrightarrow \boxed{\ln \frac{5}{2} - \frac{13}{12}}.$$

먼저 유한합을 정리했으므로 발산하는 조화급수들을 따로 빼는 오류가 없습니다.

B1-2 · 답안과 채점

정답

$$0 < a_n - \ln\frac{5}{2} < \frac{3}{10n}$$

$$\lim a_n = \ln\frac{5}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln\frac{5}{2} - \frac{13}{12}$$

모범답안

감소함수 넓이의 비교로 $a_n - \dfrac{3}{10n} < \ln\dfrac{5}{2} < a_n$이다. 이 부등식에서 극한은 $\ln\dfrac{5}{2}$. 또 $b_n = a_{n+1} - a_n$이고 $a_1 = \dfrac{13}{12}$이므로 급수의 합은 $\ln\dfrac{5}{2} - \dfrac{13}{12}$이다.

부분점수 기준 · 35점

점수	확인할 근거
6점	적분과 두 직사각형 합
4점	오차 상한
8점	전체 오차가0으로 감
7점	극한과 구간·항 개수 확인
5점	두 앞 항·다섯 뒤 항
5점	초기항과 부분합

대문항·소문항 배점과 별도로, 위 세부 항목은 BlueMath 연습용 채점 기준입니다. 대학의 미공개 세부 기준을 확정하여 제시한 것이 아닙니다.

감점 요소·정당한 빠른 접근

주의 a_{n+1}에서 처음 항이 한 개만 없어지는 것으로 쓰면 마지막 답이 달라집니다.

빠른 접근 인접한 합의 중간 항을 전부 쓰지 말고 처음 두 항과 마지막 다섯 항만 비교합니다.

출처·기존 자료 BlueMath 신규 예상. 2027 의예2의 적분 비교·유한 부분합 구조를 재현하되 시작 분모2n과 끝 분모5n−1을 사용.

B1-3 · 상세해설

두 갈래 점화식과 감소 경계

첫 판단과 이유

주어진 식을 작은 항에서 확인한 뒤 다음 구간으로 옮기는 귀납 증명을 합니다. 그 식으로 감소하는 경계를 찾으면 두 번째와 세 번째 물음의 경우가 짧아집니다.

1. 구간별 식의 귀납 증명

$p=1, m=0$에서는 우변이1로 a_1과 같습니다. $n=2^{p-1}+m$에 대해 식이 성립한다고 하면

$$a_{2n+r}=2+\frac{m-1}{2^{p-1}}+\frac{r+1}{2^p}=2+\frac{2m+r-1}{2^p}.$$

이는 다음 구간의 위치 $2m+r$에 대한 식입니다. 모든 다음 항은 이 두 꼴 중 하나이므로 귀납법이 완성됩니다. 각 구간 안에서는 증가하며 감소 경계는 $4, 8, 16, 32, 64, \ldots$입니다. $1 \to 2$는 증가입니다.

2. 14까지의 두 감소

14 이전의 감소 경계는4와8뿐이므로 첫 감소는 반드시 $b_2=3, b_3=4$입니다. 실제 $a_3=2, a_4=\frac{7}{4}$이며 $b_1=1, 2$ 두 개입니다. 다음 증가에서 $b_4=5, 6, 7$이 가능하고 그때 b_5는 각각

$$\{8\}, \qquad \{8,9,10\}, \qquad \{8,9,10,11,12\}$$

입니다. 식(1)로 각 부등식을 확인하면 $a_{14}=\frac{21}{8}$은 이 모든 값보다 큽니다. 따라서 $\boxed{2(1+3+5)=18}$개입니다. 뒤에16을 택하고 이후 각 구간 끝과 다음 처음을 번갈아 골라 무한히 연장할 수 있습니다.

3. 다섯 감소의 하한과 실현

$b_2 \to b_3$부터 $b_{10} \to b_{11}$까지 다섯 감소가 필요합니다. 서로 겹치지 않는 각 지표 구간에 감소 경계가 있어야 하므로 $b_{11} \ge 64$, $b_{12} \ge 65$입니다.

$$1, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31, 32, 63, 64, 65$$

는 실제 조건을 만족합니다. $a_{65}=2$, $a_{128}<2$이고 이후 각 구간 끝의 값은2보다 커서 같은 선택을 무한히 이어갈 수 있습니다. 따라서 $\boxed{\min b_{12}=65}$입니다.

B1-3 · 답안과 채점

정답

$$a_{2^{p-1}+m} = 2 + \frac{m-1}{2^{p-1}}$$

$$18$$

$$\min b_{12} = 65$$

모범답안

귀납 가정에 점화식을 대입하면 다음 위치$2m + r$에서도 식이 성립한다. 따라서 감소 경계는4,8,16,…이다. $b_6 = 14$이면 $(b_2, b_3) = (3, 4)$이고 b_1은2가지, 나머지는1+3+5가지라 총18개이다. 다섯 감소에는64까지의 다섯 경계가 필요하여 $b_{12} \geq 65$이고, 제시한 수열이 이를 이룬다.

부분점수 기준 · 30점

점수	확인할 근거
4점	초기항
6점	다음 구간의 모든 항에 대한 귀납
4점	첫 감소의 강제
6점	세 경우·18
5점	다섯 경계 하한
5점	실현 및 무한 연장

대문항·소문항 배점과 별도로, 위 세부 항목은 BlueMath 연습용 채점 기준입니다. 대학의 미공개 세부 기준을 확정하여 제시한 것이 아닙니다.

감점 요소·정당한 빠른 접근

주의 값이 같은 경우는 엄격한 증가나 감소로 셀 수 없습니다. 예를 들어 $a_3 = a_5 = 2$입니다.

빠른 접근 지표14 이전의 감소 경계가 두 개뿐이라는 사실부터 쓰면 다섯 지표를 무작정 나열하지 않아도 됩니다.

출처·기존 자료 BlueMath 신규 예상. 2027 의예3의 세 갈래 점화식을 두 갈래로 바꾸고, 닫힌 식의 증명·경우의 수·최소 지표를 세 물음으로 재설계.