2027학년도 / 약술형논술 수학

국민대

자연

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

국민대 수리논술

FINAL 제02회

문제편

공통 + 미적분 · 수학 단독 연습
수학·수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·미적분 / 8대문항·24소문항 / 80점
권장 70분 · 문항 풀이 60분 + 답안 점검 10분
소문항별 단답형

모든 소문항의 답만 마지막 단답형 답안지에 작성하십시오. 수·식·범위·순서쌍은 질문에서 요구한 형태로 쓰고, 분수는 약분하십시오. 풀이 메모는 문제지 여백을 사용합니다.

문항	배점	권장 시간
1	8점	6분
2	8점	6분
3	10점	7분
4	10점	7분
5	10점	8분
6	10점	8분
7	12점	9분
8	12점	9분

이름 _____ **응시일** _____

시작 시각 _____ 종료 시각 _____

공식 자연계열 고사는 국어 2문항·수학 8문항을 합해 90분입니다. 위 시간과 소문항 배점은 이 수학 연습지의 학습용 기준입니다. 모든 문항은 BlueMath가 직접 만든 변형·예상 문항입니다.

제작·해설 최민구T

FINAL 02 · 수학 문제

[문제 1] 8점

$a > 1$이다. 두 곡선 $y = 27a^x$, $y = \frac{1}{3}a^x$가 직선 $y = 9$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 사이의 거리는 4이다.

(1) $\log_a 3$의 값을 구하시오. [2점]

(2) a의 값을 구하시오. [3점]

(3) 점 P의 x좌표를 구하시오. [3점]

풀이 메모

[문제 2] 8점

첫째항이 양수이고 공비가 $0 < r < 1$인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{64}{3}.$$

(1) 공비 r의 값을 구하시오. [2점]

(2) 첫째항 a_1의 값을 구하시오. [3점]

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값을 구하시오. [3점]

풀이 메모

FINAL 02 · 수학 문제

[문제 3] 10점

열린구간 $0 < x < 2$에서 방정식

$$\sin(2\pi x)\{\cos(2\pi x) - \frac{1}{2}\} = 0$$

을 생각하자.

(1) $\sin(2\pi x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. [3점]

(2) 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. [3점]

(3) 주어진 방정식의 가장 작은 양의 실근을 구하시오. [4점]

풀이 메모

[문제 4] 10점

$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax + 9$가 $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.

(1) a의 값을 구하시오. [3점]

(2) f의 극댓값을 구하시오. [3점]

(3) f의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오. [4점]

풀이 메모

FINAL 02 · 수학 문제

[문제 5] 10점

곡선 $3x+\sqrt{y}=xy$ 위의 점 $P=(2,4)$를 생각하자. 이 점 근방에서 $y>0$이고 y는 x의 미분가능한 함수이다.

(1) 점 P에서 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

(2) 이 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

(3) 점 P에서 법선의 기울기를 구하시오. [4점]

풀이 메모

[문제 6] 10점

삼차 이하의 다항함수 f가 $f(0)=0$, $f(-x)=f(x)$를 만족하고

$$\int_0^1 xe^{f(x)}\,dx=-\frac{1}{6}+\frac{e^3}{6}$$

이다.

(1) $f(x)$를 구하시오. [3점]

(2) $f'(1)$을 구하시오. [3점]

(3) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)e^{f(x)}\,dx$를 구하시오. [4점]

풀이 메모

FINAL 02 · 수학 문제

[문제 7] 12점

$f(x) = x^3 - 3x$이다. $x = 2$에서의 접선을 ℓ이라 하고, 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자.

(1) 접선 ℓ의 방정식을 구하시오. [4점]

(2) 접점 이외의 교점의 x좌표를 구하시오. [4점]

(3) 넓이 S를 구하시오. [4점]

풀이 메모

[문제 8] 12점

$I = \int_0^1 (4x + 2)e^x \, dx$라 하자.

(1) I를 구하시오. [4점]

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$를 구하시오. [4점]

(3) $\displaystyle\int_0^1 x(4x + 2)e^x \, dx$를 구하시오. [4점]

풀이 메모

FINAL 02 · 단답형 답안지

성명 _____ 총점 _____/80점

문항	(1)	(2)	(3)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

마지막 확인

질문에서 요구한 값인지, 정의역의 제외값을 반영했는지, 등호가 포함되는지, 극값의 위치와 값을 혼동하지 않았는지 확인하십시오.

국민대 수리논술

FINAL 제02회

상세 해설 · 숏컷 풀이

공통 + 미적분 · 수학 단독 연습
수학·수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·미적분 / 8대문항·24소문항 / 80점
권장 70분 · 문항 풀이 60분 + 답안 점검 10분
소문항별 단답형

먼저 정답표로 결과를 확인한 뒤, 틀린 문항은 정석 풀이에서 조건을 읽은 단계를 찾으십시오. 숏컷은 전제와 적용 범위를 확인하며 다시 풀 때 사용합니다.

문항	배점	권장 시간
1	8점	6분
2	8점	6분
3	10점	7분
4	10점	7분
5	10점	8분
6	10점	8분
7	12점	9분
8	12점	9분

이름 _____ **응시일** _____

시작 시각 _____ 종료 시각 _____

공식 자연계열 고사는 국어 2문항·수학 8문항을 합해 90분입니다. 위 시간과 소문항 배점은 이 수학 연습지의 학습용 기준입니다. 모든 문항은 BlueMath가 직접 만든 변형·예상 문항입니다.

제작·해설 최민구T

FINAL 02 · 빠른 정답표

문항	(1)	(2)	(3)
1	1	3	-1
2	$\frac{1}{4}$	16	$\frac{4096}{15}$
3	3	7	$\frac{1}{6}$
4	3	29	27
5	$-\frac{4}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{7}{4}$
6	$3x^2$	6	$\frac{1}{6}+\frac{e^3}{3}$
7	$y=9x-16$	-4	108
8	$2+2e$	$-2+e$	$-6+4e$

수식으로 답하는 문항은 위 식과 동치인 식도 정답입니다. 범위와 모든 해를 묻는 문항은 제외값·순서·누락을 확인하십시오.

문제 1 · 지수곡선의 수평 거리

8점 · 권장 6분

$a>1$이다. 두 곡선 $y=27a^{x}$, $y=\frac{1}{3}a^{x}$가 직선 $y=9$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 사이의 거리는 4이다.

정답 (1) 1 (2) 3 (3) -1

(1) 정석 풀이

$\log_a 3$의 값을 구하시오.

P, Q의 x좌표는 각각 $\log_a(\frac{9}{27})$, $\log_a 27$이다. $a>1$이고 첫째 곡선의 계수가 더 크므로 P가 왼쪽에 있다. 두 좌표를 빼면 $(4)\ \log_a 3=4$이다.

(2) 정석 풀이

a의 값을 구하시오.

$\log_a 3=1$에서 $a^{1}=3$이다. 따라서 $a=3$이다. 이 값은 1보다 크므로 주어진 조건을 만족한다.

(3) 정석 풀이

점 P의 x좌표를 구하시오.

P의 좌표는 $\log_a(\frac{9}{27})=(-1)\log_a 3=-1$이다. 원래 지수식에 넣으면 $y=9$가 되므로 교점 조건을 재확인할 수 있다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

두 교점의 좌표를 각각 끝까지 구하기 전에 차를 구한다. 수평 거리 $d=\log_a \frac{A}{C}$이므로 여기서는 $4=(4)\log_a 3$ 한 줄로 밑을 결정한다.

오답 점검

같은 높이에서 큰 계수의 지수곡선이 왼쪽에 온다. 거리에는 절댓값이 있으므로 좌우 관계를 먼저 정한다.

유형·개념 연계 평가원 2027학년도 9월 공통 10번 · 지수곡선 거리 / 2027 EBS 수능완성 수 I·수 II·미적분 · PDF 7쪽, 지수·로그 유형

올해 9월 평가원 지수곡선의 수평 거리 발상을 계수·높이·질문 순서를 바꾸어 재구성했다.

문제 2 · 유한합과 무한합의 비

8점 · 권장 6분

첫째항이 양수이고 공비가 $0 < r < 1$인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{64}{3}.$$

정답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 16 (3) $\frac{4096}{15}$

(1) 정석 풀이

공비 r의 값을 구하시오.

유한합을 무한합으로 나누면 $1 - r^3 = \frac{63}{64}$이다. 따라서 $r^3 = \frac{1}{64}$이고 $r > 0$이므로 $r = \frac{1}{4}$이다.

(2) 정석 풀이

첫째항 a_1의 값을 구하시오.

$\frac{a_1}{1-r} = \frac{64}{3}$이므로 $a_1 = \frac{64}{3}(1 - \frac{1}{4}) = 16$이다. 첫 세 항의 합에 대입해도 21가 나온다.

(3) 정석 풀이

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값을 구하시오.

a_n^2도 등비수열이고 첫째항은 256, 공비는 $\frac{1}{16}$이다. 공비의 절댓값이 1보다 작으므로 합은 $\frac{256}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4096}{15}$이다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

처음 m개 항의 합을 무한합으로 나누면 $1 - r^m$이 남는다. 공비를 먼저 결정하고, 제곱합에서는 공비도 반드시 제곱한다.

오답 점검

무한등비급수는 |r|<1일 때만 합 공식이 성립한다. 주어진 조건으로 이 전제를 확인한 뒤 비를 사용한다.

유형·개념 연계 국민대 2026학년도 자연 오후 1 문제 1 · 첨부 합본 PDF 7쪽 / 2027 EBS 수능특강 미적분 · 수열·미분·정적분 단원 개념 비교 (PDF 4·17·28·62·88쪽 등 표본 확인)

국민대 유한합·무한합 구조를 제곱급수 단답까지 확장했다.

문제 3 · 인수별 삼각방정식의 근 개수

10점 · 권장 7분

열린구간 $0 < x < 2$에서 방정식

$$\sin(2\pi x)\{\cos(2\pi x) - \frac{1}{2}\} = 0$$

을 생각하자.

정답 (1) 3 (2) 7 (3) $\frac{1}{6}$

(1) 정석 풀이

$\sin(2\pi x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$2\pi x = j\pi$이므로 $x = \frac{j}{2}$이다. $0 < x < 2$에서 $j = 1, \dots, 3$이므로 3개이다. 끝점 $0, 2$는 포함하지 않는다.

(2) 정석 풀이

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$는 각의 구간 $0 < 2\pi x < 4\pi$에서 한 주기당 2개씩, 총 4개이다. 첫째 인수의 근에서는 코사인이 1 또는 -1이므로 이 근들과 겹치지 않는다. 따라서 $3 + 4 = 7$개이다.

(3) 정석 풀이

주어진 방정식의 가장 작은 양의 실근을 구하시오.

둘째 인수의 가장 작은 양의 각은 $\frac{\pi}{3}$이므로 근은 $\frac{1}{6}$이다. 첫째 인수의 가장 작은 양의 근은 $\frac{1}{2}$이다. $\frac{\pi}{3} < \pi$이므로 둘째 인수에서 얻은 근이 전체에서 가장 작다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

곱이 0인 식은 인수별로 나누어 한 주기의 근 수를 센다. sin=0인 점에서 cos=±1임을 이용하면 중복 여부를 즉시 판정할 수 있다.

오답 점검

열린구간의 두 끝점은 제외한다. 인수별 근 수를 더하기 전에 공통근이 없는지 확인한다.

유형·개념 연계 평가원 2027학년도 6월 공통 14번 · 삼각함수 근 개수 / 2027 EBS 수능특강 수학 Ⅰ · 지수·로그·삼각함수 단원 개념 비교

올해 6월 평가원 삼각함수 근 개수의 핵심을 인수분해된 식으로 분리하고 주기를 변형했다.

문제 4 · 극소 위치로 정하는 삼차함수

10점 · 권장 7분

$f(x)=2x^3+ax^2-4ax+9$가 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

정답 (1) 3 (2) 29 (3) 27

(1) 정석 풀이

a의 값을 구하시오.

$f'(x)=6x^2+2ax-4a$이다. $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=6-2a=0$이다. 따라서 $a=3$이다.

(2) 정석 풀이

f의 극댓값을 구하시오.

대입하면 $f'(x)=6(x+2)(x-1)$이다. 부호는 $+,-,+$이므로 $x=-2$에서 극대, $x=1$에서 극소이다. 극댓값은 $f(-2)=29$이다.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

(3) 정석 풀이

f의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오.

극솟값은 $f(1)=2$이다. 따라서 차는 $29-(2)=27$이다. 상수항 9는 두 값에 똑같이 들어가므로 차에서 사라진다.

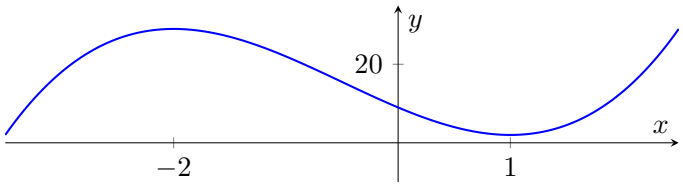
숏컷 · 빠르게 푸는 순서

극소 위치에서 도함수를 0으로 두고 계수를 정한다. 인수분해된 도함수의 부호로 극대·극소를 구분하고 값의 차에서는 상수항을 생략한다.

오답 점검

f′=0인 것만으로 극소라고 단정하지 않는다. 실제로 −에서 +로 바뀌는지 확인한다.

그래프: $y=f(x)$ · 극대 위치 -2, 극소 위치 1



유형·개념 연계 평가원 2027학년도 9월 공통 7번 · 삼차 극값 / 평가원 2015학년도 9월 수학 A 17번 · 마플 수Ⅱ 문제 0784, 인쇄 184쪽 / 평가원 2020학년도 9월 수학 나 17번 · 마플 수Ⅱ 문제 0787, 인쇄 184쪽

올해 및 과거 9월 평가원 극값 구조를 위치·값·차의 단답으로 구성했다.

문제 5 · 음함수의 미분과 접선

10점 · 권장 8분

곡선 $3x+\sqrt{y}=xy$ 위의 점 $P=(2,4)$를 생각하자. 이 점 근방에서 $y>0$이고 y는 x의 미분가능한 함수이다.

정답 (1) $-\frac{4}{7}$ (2) $\frac{36}{7}$ (3) $\frac{7}{4}$

(1) 정석 풀이

점 P에서 접선의 기울기를 구하시오.

양변을 미분하면 $3+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=y+xy'$이다. $(\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-x)y'=y-3$에 점 P를 대입하면 기울기는 $-\frac{4}{7}$이다.

(2) 정석 풀이

이 접선의 y절편을 구하시오.

접선은 $y-4=(-\frac{4}{7})(x-(2))$이다. $x=0$을 넣으면 $y=\frac{36}{7}$이므로 y절편은 $\frac{36}{7}$이다.

(3) 정석 풀이

점 P에서 법선의 기울기를 구하시오.

접선 기울기가 0이 아니므로 법선 기울기는 그 음의 역수이다. 따라서 $\frac{7}{4}$이다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

미분식에서 y′를 모은 뒤 수치를 넣는다. 접선 절편은 y_0-mx_0, 법선 기울기는 $-\dfrac{1}{m}$으로 계산한다.

오답 점검

√y를 미분할 때 y′가 곱해진다. 법선은 접선 기울기의 음의 역수이다.

유형·개념 연계 평가원 2027학년도 6월 미적분 24번 · 음함수 미분 / 광운대 2025 모의 문제 2 [2] · 기존 미분그래프 유형학습 3권 확인

올해 6월 평가원 음함수에 접선 절편·법선 단답을 추가했다.

문제 6 · 짝함수 조건과 지수 치환

10점 · 권장 8분

삼차 이하의 다항함수 f가 $f(0)=0$, $f(-x)=f(x)$를 만족하고

$$\int_0^1 xe^{f(x)}\,dx=-\frac{1}{6}+\frac{e^3}{6}$$

이다.

정답 (1) $3x^2$ (2) 6 (3) $\frac{1}{6}+\frac{e^3}{3}$

(1) 정석 풀이

$f(x)$를 구하시오.

짝함수이므로 홀수차항의 계수는 0이고, f(0)=0이므로 상수항도 0이다. 따라서 $f(x)=bx^2$이다. $b\neq 0$이면 적분은 $\dfrac{e^b-1}{2b}$이다. $b=3$가 조건을 만족한다. 또한 $b_1<b_2$이면 $0<x\le 1$에서 $xe^{b_1x^2}<xe^{b_2x^2}$이므로 적분은 b에 대하여 엄밀히 증가한다. 따라서 $b=3$는 유일하다.

(2) 정석 풀이

$f\prime(1)$을 구하시오.

$f\prime(x)=6x$이므로 $f\prime(1)=6$이다.

(3) 정석 풀이

$\int_0^1 xf(x)e^{f(x)}\,dx$를 구하시오.

$u=3x^2$로 놓으면 $x\,dx=\dfrac{du}{6}$이다. 따라서 적분은 $\frac{1}{6}\int_0^3 ue^u\,du=\frac{1}{6}[(u-1)e^u]_0^3=\frac{1}{6}+\frac{e^3}{3}$이다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

차수와 짝함수 조건으로 f=bx²까지 줄인다. 지수의 안쪽을 치환하면 앞의 x가 미분 인수와 맞는다. 마지막은 $\int ue^u\,du=(u-1)e^u+C$를 쓴다.

오답 점검

b=h를 대입해 맞는다는 것만으로 유일성이 증명되지는 않는다. 적분값이 b에 따라 엄밀히 증가함을 확인한다.

유형·개념 연계 광운대 2027 모의 자연 문제 1 [3] · 짝다항식·지수 적분 / 2027 EBS 수능특강 미적분 · 수열·미분·정적분 단원 개념 비교 (PDF 4·17·28·62·88쪽 등 표본 확인)

광운대 올해 짝다항함수와 지수적분을 조건 복원·가중 적분 단답으로 확장했다.

문제 7 · 삼차곡선과 접선 사이의 넓이

12점 · 권장 9분

$f(x)=x^3-3x$이다. $x=2$에서의 접선을 ℓ이라 하고, 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자.

정답 (1) $y=9x-16$ (2) -4 (3) 108

(1) 정석 풀이

접선 ℓ의 방정식을 구하시오.

접점의 높이는 2, 기울기는 9이다. 따라서 접선은 $y-2=9(x-2)$, 즉 $y=9x-16$이다.

(2) 정석 풀이

접점 이외의 교점의 x좌표를 구하시오.

$f(x)-\ell(x)=(x-2)^2(x+4)$이다. 접점은 이중근이고 다른 교점은 $x=-4$이다.

(3) 정석 풀이

넓이 S를 구하시오.

두 교점 사이에서 $f-\ell\ge 0$이다. 따라서 $S=\int_{-4}^{2}(x-2)^2(x+4)\,dx=108$이다. $u=x+4$로 옮기면 $\int_0^6 u(u-6)^2\,du$가 된다.

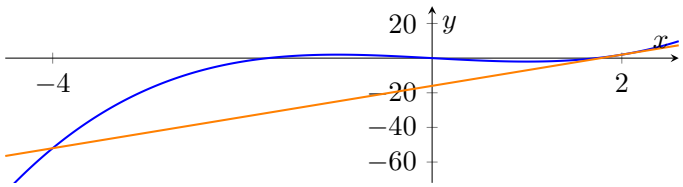
숏컷 · 빠르게 푸는 순서

접선과의 차는 접점에서 이중근을 갖는다. 최고차항이 1인 x³+cx에서는 차가 (x−t)²(x+2t)이다. 마지막 평균값 조건은 접선의 중점 값으로 읽는다.

오답 점검

접점은 중근이므로 적분구간을 나누는 추가 교점으로 두 번 세지 않는다. 넓이에서는 차의 부호를 확인한다.

파랑: $y=f(x)$ / 주황: 접선 · 실제 좌표의 보조 그림



유형·개념 연계 단국대 2027 모의 자연 문제 1 논제 2 · 공식 문제지 PDF 2쪽, 삼차 접선 넓이 / 평가원 2027학년도 9월 공통 19번 · 삼차 접선 / 가천대 2027 모의 의예 문제 4 · 첨부 모의 합본 PDF 2쪽, 실근 이동

단국대 올해 삼차 접선 넓이를 교점·평균값의 국민대 단답으로 변형했다.

문제 8 · 부분적분의 재사용

12점 · 권장 9분

$I=\int_0^1 (4x+2)e^x\,dx$라 하자.

정답 (1) $2+2e$ (2) $-2+e$ (3) $-6+4e$

(1) 정석 풀이

I를 구하시오.

$\int_0^1 e^x\,dx=e-1$이고 $\int_0^1 xe^x\,dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=1$이다. 따라서 $I=4+2(e-1)=2+2e$이다.

(2) 정석 풀이

$\int_0^1 x^2e^x\,dx$를 구하시오.

부분적분하면 $\int_0^1 x^2e^x\,dx=[x^2e^x]_0^1-2\int_0^1 xe^x\,dx=e-2$이다. 앞 소문항에서 구한 적분값 1을 다시 사용한다.

(3) 정석 풀이

$\int_0^1 x(4x+2)e^x\,dx$를 구하시오.

다항식을 나누어 $4\int_0^1 x^2e^x+2\int_0^1 xe^x$로 쓴다. 앞의 결과를 넣으면 $4(e-2)+2=-6+4e$이다.

숏컷 · 빠르게 푸는 순서

$\int_0^1 e^x\,dx$, $\int_0^1 xe^x\,dx$, $\int_0^1 x^2e^x\,dx$의 정적분값을 순서대로 확보한다. 다음 소문항에서는 부분적분을 다시 하지 말고 이미 구한 값을 선형 결합한다.

오답 점검

부분적분의 경계항은 위끝과 아래끝을 모두 대입한다. 정적분값 1은 $\int_0^1 xe^x\,dx$에 해당하며 일반 원시함수의 상수가 아니다.

유형·개념 연계 평가원 2027학년도 9월 미적분 24번 · 부분적분 / 2027 EBS 수능특강 미적분 · 수열·미분·정적분 단원 개념 비교 (PDF 4·17·28·62·88쪽 등 표본 확인)

올해 9월 평가원 부분적분을 적분값 재사용의 세 단답으로 구성했다.